

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

46e jaargang
1970/1971
no 3
november

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oestgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Computerkunde bij het Algemeen Voortgezet Onderwijs

A. van der SLUIS
Utrecht

Inleiding

Dit stuk beoogt uiteen te zetten dat computerkunde een noodzakelijk onderwerp is op elk leerplan voor algemeen voortgezet onderwijs (verder af te korten als AVO, waaronder begrepen VWO), dat een inleiding tot dit vak in het wiskundeprogramma thuishoort, en door de wiskundeleraar gegeven moet worden. Een leerplanschets wordt gegeven. Men kan dit stuk zien als een uitwerking van [1], echter geheel voor verantwoordelijkheid van de auteur.
Het gaat hier dus duidelijk niet om beroepsonderwijs. Dit betekent niet dat op scholen voor beroepsonderwijs computerkunde niet net zo nodig zou zijn. Maar de doeleinden en middelen kunnen daar wel anders zijn.

1 *Doel van het AVO*

Een groot aantal onderwerpen komt op zichzelf genomen in aanmerking om in het schoolprogramma opgenomen te worden. Het is daarom duidelijk dat men zeer scherpe criteria zal moeten aanleggen alvorens een nieuw onderwerp op te nemen, temeer waar dit over het algemeen zal impliceren dat iets anders moet wijken. Overigens dienen dezelfde criteria te worden aangelegd om te bezien of dat wat is, kan blijven.
Deze criteria hangen uiteraard samen met de doelstellingen van het onderwijs als geheel. Aangezien het, voor zover ik heb kunnen nagaan, al weer 10 jaar geleden is dat in dit tijdschrift aandacht gegeven is aan de algemene doelstellingen van het onderwijs (n.l. in het artikel van W. Peremans, Euclides **36** (1960), p. 129–164), lijkt het me verantwoord hierop allereerst in te gaan. [1]) Temeer waar er inmiddels een mammoetwet in werking is getreden waarin niets over deze materie te vinden is, en er in het voorjaar 1968 voorstellen leerplan rijksscholen zijn verschenen waar het wiskundeleerplan een van de weinige is die

[1] Na het gereed komen van dit artikel verscheen juist het artikel 'De doelstellingen van het wiskundeonderwijs' van H. van der Hak (Eucl. **45** (1970), p. 289–299). Het is niet de bedoeling van het huidige artikel met de heer van der Hak in discussie te treden (auteur)
Wij wijzen ook op 'Naar een nieuw onderwijsprogramma voor de wiskunde' van J. van Dormolen (Eucl. **46** (1970), p. 1–7) (redactie).

niet met een doelstelling ingeleid worden. Het is kennelijk een heet hangijzer, begrijpelijk overigens gezien de snelheid waarmee onze maatschappij en maatschappijbeschouwing evolueren, en daarmee de inzichten betreffende het doel van het onderwijs. Desondanks: hoe kan men leerplannen opstellen zonder een welomschreven doel?
Zeer schematisch gezegd zie ik als belangrijkste taken van het AVO de leerlingen voor te bereiden op

(a) *het leven in de wereld van morgen*
(b) *het werken in de wereld van morgen*
(c) *verdere studie*

Aan elk van deze taken is inherent persoonlijkheidsvorming van de leerling, waaronder begrepen zaken als het bijbrengen van verantwoordelijkheidsgevoel, zin voor samenwerking e.d. Aan dit aspect ga ik in deze beschouwing voorbij, o.a. omdat het me voorkomt dat dit minder met het leerplan dan met de wijze van onderwijs geven samenhangt.
Over elk van deze taken eèn paar woorden:

Taak (a). De leerling moet leren hoe een samenleving functioneert, hoe deze zich ontwikkelt, welke krachten daarin een rol spelen, en hoe deze krachten beheerst kunnen worden.

Taak (b). Voor elke taak zijn zekere specifieke kennis en bekwaamheid vereist. Het is niet de taak van het AVO deze bij te brengen, maar wel moet het er de basis voor leggen. Maar ook en vooral moet het algemene bekwaamheden en niet-specifieke kennis bijbrengen. Onder algemene bekwaamheden versta ik bekwaamheden als: tot de kern van een zaak door te dringen, te leren, je kennis te gebruiken, een werk af te ronden, te organiseren. Nu specifieke kennis en bekwaamheid aan een zo snelle veroudering onderhevig zijn wordt de betekenis van deze algemene bekwaamheden steeds groter. De hoedanigheid van een vak, die de ontwikkeling van deze algemene bekwaamheden bevordert, behoort tot de vormende waarde ervan, een vaag begrip waarmee men gewoonlijk de mate aanduidt waarin dit vak in staat is een wenselijke habitus aan te kweken, iemand te leren om andere dingen die met het betrokken vak in feite niets uitstaande hebben, beter te doen. Een vak dat traditioneel hoog om zijn vormende waarde wordt aangeslagen is de wiskunde.

Taak (c). In principe verschilt deze taak niet van de vorige, maar in zijn implicaties wel degelijk, doordat de verdere studie wel heel specifieke eisen kan stellen (men denke aan latijn en wiskunde als noodzakelijke voorbereiding voor tal van studierichtingen), waaraan zonder de nodige aandacht op school niet voldaan kan worden, en ook diverse algemene bekwaamheden krijgen hier speciale nadruk.

Het spreekt vanzelf dat deze taken evenzovele criteria vormen die men dient te hanteren bij het overwegen of een onderwerp een plaats op het leerplan verdient of niet. In verband met het grote belang ervan licht ik echter het onderdeel vor-

mende waarde uit (b), en maak hiervan een apart criterium, criterium (d). Het belang van onderwijs in een bepaald vak is een soort gewogen som van de maten waarin het aan al deze criteria voldoet. Hoe moeilijk deze dingen ook te wegen zijn, het is duidelijk dat opstellers van schoolprogramma's de plicht hebben te streven naar optimalisatie van de output. Dit geldt voor elk te onderwijzen vak apart, maar ook voor het onderwijspakket als geheel,vooral wanneer, zoals ten onzent, de leerling althans in de eerste 3 of 4 jaren bij het AVO slechts de keus heeft uit een paar standaardpakketten.
Heeft men zich er bij de opstelling van het leerplan voor enig vak, bijv. voor de wiskunde, inderdaad bewust rekenschap van gegeven in welke mate elk onderdeel ervan de bovengenoemde doeleinden dient, en in welke mate dezelfde doeleinden met minder moeite bereikt zouden kunnen worden door een andere (zij het wellicht minder bij de traditie of de universitaire mode aansluitende) keuze van de stof?

2 *Het belang van computerkunde*

In het licht van de voorafgaande beschouwingen willen we nu het vak computerkunde bezien. We zullen ons hierbij ter wille van lengte en overzichtelijkheid van dit artikel zeer moeten beperken; elk criterium is op zich goed voor een heel artikel.
Criterium (a). Het patroon van onze samenleving ontwikkelt zich in snel tempo en de computer is hierin een belangrijk instrument. Reeds nu heeft de computer vele belangrijke veranderingen teweeg gebracht, terwijl hij nog pas 10 jaar op enige schaal in gebruik is. Slechts zeer weinigen realiseren zich (of moet ik zeggen: hebben genoeg fantasie) in welke mate de computer in de toekomst ons leven zal gaan beinvloeden. We kunnen ons aan deze kracht niet onttrekken, en moeten er ook niet bang voor zijn, maar hem accepteren en trachten ermee vertrouwd te raken, juist als met andere belangrijke krachten in de samenleving.
De computer brengt een sociale en culturele revolutie teweeg, waarvan het belang vergeleken kan worden met dat van de industriële revolutie in de vorige eeuw. Werd toen routinematige *lichamelijke* arbeid door machines overgenomen, nu is dit het geval met routinematige *geestelijke* arbeid. Het feit dat veel activiteiten die altijd van intellectuele aard geacht werden nu routinewerkzaamheden blijken te zijn, die men kan programmeren voor een computer, is ook conceptueel een gebeurtenis van de eerste orde, die een nieuw licht werpt op menselijke activiteiten.
Het huidige gebrek aan inzicht bij de doorsnee burger omtrent de wijze waarop deze nieuwe kracht in onze samenleving functioneert wekt verwarring en onzekerheid. Maar ook bevordert dit dat deze kracht ons gaat overheersen in plaats van andersom. In dit verband mag nog eens aan Norbert Wiener's bekende reactie herinnerd worden op de vraag of het gevaar dat robots ons zouden gaan overheersen niet tamelijk denkbeeldig is omdat men dan toch eenvoudig de stekker uit het stopcontact kan trekken. Wiener's antwoord was dat dit middel

wel eens erger dan de kwaal zou kunnen zijn; immers, naar mate men meer aan de robots overlaat, wordt de samenleving meer ontwricht wanneer men ze buiten gebruik stelt. Computers in de hand te houden zal een belangrijke taak zijn van deze generatie, en moet niet worden overgelaten aan een kleine clan van computermagiërs.

Criterium (*b*). Wat onder (a) gezegd werd over de revolutie die computers teweeg brengen raakt natuurlijk ook en heel speciaal de werksituatie.
Vele vroeger door mensen vervulde functies worden nu verricht door computers. Een computer kan sneller en vollediger alle mogelijkheden overzien om een machine of wagenpark te benutten dan mensen. Een computer kan de toestand van een bedrijf op de huidige minuut weergeven. Aan te houden voorraden kunnen veel nauwkeuriger beheerst worden. Bibliografische gegevens kunnen veel sneller teruggevonden worden. Maar ook kan de computer allerlei dingen doen die vroeger helemaal niet gebeurden, zoals het door simulatie schatten van het effect van maatregelen die men overweegt te nemen.
De taken die door mensen moeten worden vervuld verschuiven hierdoor uiteraard aanzienlijk. Wegens de universele bruikbaarheid van de computer kan men rustig zeggen dat een groot percentage van de huidige scholieren in hun latere werkkring op een of andere manier met computers te maken krijgt. Zij zullen hun werk verrichten door middel van computers, (ook al zullen ze hem misschien niet zelf programmeren of bedienen) en zij zullen werk uitvoeren dat geheel of gedeeltelijk door computers is voorbereid. Het is daarbij niet van belang dat zij precies weten hoe men de meest uiteenlopende dingen met een computer doet. Het gaat erom dat zij er besef van hebben wat een computer zoal kan doen, zodat zij in voorkomende gevallen naar een een computerexpert kunnen gaan.
Dit besef, niet de vakbekwaamheid is wat alle leerlingen op school moeten opdoen.

Criterium (*c*). Aangezien in zoveel beroepen de computer een belangrijke rol gaat spelen is het duidelijk dat vele leerlingen de computer bij hun verdere opleiding zullen tegenkomen. Dit is zeker ook waar voor studie aan de universiteit.
Reeds in de nabije toekomst zullen er slechts weinig studierichtingen zijn waarin men niet in meerdere of mindere mate met de computer in aanraking komt. Het zijn bepaald niet alleen de studenten in de exacte wetenschappen die tijdens hun studie met de computer moeten werken, maar ook de studenten in vakken als rechten, humaniora en literaire wetenschappen. In een officieel rapport uit de USA (zie [2]) schat men dat van deze laatste categorieën omstreeks de helft enig computerwerk zullen doen.

Criterium (*d*). De vormende waarde van het leren werken met een computer kan nauwelijks overschat worden. Het kweekt n.l. een sterk operationele, algoritmische en organisatorische instelling aan. Met deze termen bedoel ik het volgende.

Operationeel. Een operationele instelling is het streven kennis en informatie die tot je komt (en die waarover je reeds beschikt) operationeel te maken, d.w.z. geschikt om mee te werken. Dit betekent een evalueren ervan, en je bewust maken wat het impliceert, wat je er aan hebt. De leerlingen blijken vaak wel allerlei dingen te weten, maar het schort steeds weer aan deze operationaliteit. Een gebrek hieraan trachten ze dan vaak voor zichzelf en hun leraar te verbergen achter breedsprakigheid, en vaak schoppen ze het hiermee een heel eind. Bij een computer komen ze echter met breedsprakigheid niet ver. Dan moeten ze zich precies realiseren wat ze weten, wat er gegeven is, en hoe ze hiermee moeten handelen om een gesteld doel te bereiken.

Algoritmisch. Het woord algoritme betekent zoiets als een rekenwijze. Algegemener verstaan we onder algoritme elk eenduidig voorschrift om een proces (bijv. een rekenproces of een breiproces of een telefoneerproces) uit te voeren met eindig veel welbegrepen en uitvoerbare handelingen. Algoritmiek is dan de discipline om algoritmen te herkennen, te construeren en te analyseren. Deze algoritmen moeten niet alleen tot stand brengen wat van hen verlangd wordt, maar moeten gewoonlijk ook nog aan andere condities voldoen zoals eenvoud en efficiency. Een algoritmische instelling is het streven de routineaspecten in allerlei processen te ontwaren, algoritmen voor gegeven processen te ontwikkelen.
Het belang hiervan is duidelijk. Processen die creativiteit vereisen kunnen slechts worden uitgevoerd door enkelingen, routineprocessen kunnen worden uitgevoerd door velen. En deze processen kunnen dan als bouwstenen gebruikt worden voor meer gecompliceerde processen. Dit mechanisme, creativiteit om te zetten in routine, ligt ook ten grondslag aan veel wetenschappelijke vooruitgang. Wat gisteren nog moeilijk was en veel hoofdbrekens kostte is vandaag routine geworden zodat men zich kan concentreren op verder reikende problemen. Er zijn tal van voorbeelden dat de ontwikkeling van de wetenschap langdurig stagneerde doordat allerlei kennis die al wel vergaard was nog niet tot een goed bruikbaar apparaat was omgesmeed (men denke zich maar eens in dat wij nog zo moesten rekenen zoals de Romeinen het deden of dat wij moesten integreren zoals Archimedes). Een mens is nu eenmaal niet in staat om veel problemen tegelijkertijd te behandelen; hij moet ze inkapselen, hij moet verdelen om te kunnen heersen. Dit is ook van belang in de school. Er is tegenwoordig een verschuiving van routine naar wat begrip wordt genoemd. Routine is haast een smerig woord geworden. En inderdaad is er in het verleden teveel onbruikbare routine en te weinig bruikbaar begrip aan de leerling gepresenteerd. Routine moet functioneel zijn, het moet de apparatuur zijn waar de leerlingen mee werken en dan is het onmisbaar.
Routine te vinden, te isoleren en als algoritme te formuleren is een creatieve activiteit. Een algoritmische instelling is hiervoor een vereiste.

Organisatorisch. Na het voorafgaande kunnen we hierover kort zijn. Werken met een computer betekent organiseren. Bij organiseren is het belangrijk niveau's van complexheid te onderscheiden, alle mogelijke gevallen te voorzien

en schijnbaar verschillende zaken onder één noemer te brengen. Dit is precies wat werken met de computer aankweekt.

3 *Wat voor computerkundeonderwijs*

Veel onderwijs vaart onder valse vlag. Iedereen beaamt dat wiskunde een belangrijk vak is en is bereid dit zo nodig met een aantal voorbeelden te staven. Het is helemaal niet moeilijk om voor de wiskunde een soortgelijke beschouwing te houden als hierboven onder 2 gedaan is voor computerkunde. Desondanks zat (en zit?) in het wiskundeprogramma veel dat niet aan de in 1 genoemde criteria voldoet.
Evenzo kan men ook zaken onder de vlag van belangrijkheid van de computerkunde laten meevaren waarop het onder 2 gestelde niet of veel minder van toepassing is. Velen zijn van mening dat bij computerkunde het binaire stelsel, flipflops en magneetringetjes belangrijke onderwerpen zijn, en sommigen menen dit zelfs ook ten aanzien van het bedrijfssysteem van de computer (dat de samenwerking tussen de diverse componenten regelt), datarepresentatie en -opslag, compilers etc.
Ik wil hier duidelijk stellen dat onderwijs in het binaire stelsel, de computerhardware en de computersoftware niet vallen onder de belangrijkheid die onder 2 voor computerkunde werd geclaimd. Deze onderwerpen zijn van tweede importantie, bezien in het kader van het onderwijs als geheel. Wat wel belangrijk is is algoritmiek (zie 2). Het gaat er om dat de leerling in staat is het principe van grote computertoepassingen te doorgronden en (kleine) eigen probleempjes m.b.v. een computer op te lossen.
In tegenstelling tot wat nogal eens gezegd wordt kan dit onderwerp uitstekend behandeld worden zonder dat de leerling inzicht heeft in computerhard- en software. In feite hebben ook de meeste gebruikers van computers totaal geen idee van deze zaken. Wie dit verbaast denke slechts aan auto's en TV toestellen, ook ingewikkelde apparaten die door velen gebruikt worden zonder te weten hoe ze werken.
Evenmin is het juist dat de leerling pas interesse voor computertoepassingen kan opbrengen wanneer hij weet hoe het apparaat werkt. Ervaring in de klas toont duidelijk aan dat het leeuwendeel der leerlingen er zeer in geinteresseerd is te weten hoe je met een computer werkt en er ook inderdaad mee te werken ook al weten ze niet hoe de computer werkt.
Daarom, wanneer men dan al iets aan computer hard- of software wil doen dan dient dit uitsluitend ter bevrediging van de nieuwsgierigheid van de leerling, en staat als zodanig op hetzelfde vlak als het uitleggen hoe een televisietoestel werkt.
Door de voornaamste aandacht aan algoritmiek te geven wordt de omvang van het vak computerkunde tot veel kleinere proporties teruggebracht dan men wel eens geneigd is te denken. En dat is maar goed ook, want op school is tijd een even kostbaar goed als overal elders.

Het is essentieel dat de leerling ook inderdaad met een computer werkt althans in deze zin dat hij programma's schrijft die op een echte computer verwerkt worden. Anders blijft het maar bij droogzwemmen en dit is weinig inspirerend en erg onbevredigend voor de leerling. Pas wanneer hij resultaten van de computer terug krijgt vindt het wonder plaats dat deze machine, die eens met zoveel respect bekeken werd, op zijn juiste plaats gezet wordt: een slaaf van de mens en zelfs van een schooljongen. Een tweede reden waarom het essentieel is dat de leerling programma's schrijft en de resultaten terug krijgt van een computer is om hem gevoel te geven voor de relativiteit van resultaten die met een computer verkregen zijn. Op het ogenblik is het nog zo dat voor velen een bewering, dat de computer iets heeft geconstateerd, geen tegenspraak duldt. In werkelijkheid zijn de resultaten niet van beter gehalte dan degeen die het programma ontwierp. Het is belangrijk dat de leerling zelf ziet hoe gemakkelijk men gevallen over het hoofd ziet en welke grote consequenties kleine programmeerfouten kunnen hebben.

Inmiddels moet men oppassen dat het programmeren niet teveel nadruk krijgt of nog erger dat het hele vak tot een programmeercursus ontaardt. Het is niet nodig dat de leerling een erg goed programmeur wordt. Zijn programma's hoeven geen voorbeelden van efficiency te zijn (alhoewel het ook geen voorbeelden van inefficiency hoeven te zijn). Het komt me voor dat een juiste instelling voor de leraar is dat hij het programmeren eigenlijk als een noodzakelijk kwaad beschouwt.

De te gebruiken programmeertaal dient dan ook met grote zorg gekozen te worden. Deze hoeft enerzijds niet al de verfijning van ALGOL of FORTRAN te hebben, maar moet anderzijds ook zeker de leerling niet opschepen met al de administratieve rompslomp van een machinetaal. Er moet prettig met variabelen, rijen en aritmetische uitdrukkingen (bijv. $(a+b)/2$) gewerkt kunnen worden. Om de eerste stappen van de leerling op het computerpad zo eenvoudig mogelijk te maken hebben wij het verantwoord geacht een aparte taal te ontwikkelen, ECOL geheten (Educational Computer Language), die min of meer in de doorsnee van ALGOL en FORTRAN ligt, maar een aantal onaangenaamheden van deze talen mist ten koste van wat efficiency (bijv. is er geen declaratie van enkelvoudige variabelen en er zijn geen types) en die ook wat minder kansen op vergissingen geeft (de slordigheid van leerlingen bij het schrijven van programma's is ongelooflijk). Het bezwaar dat deze taal ECOL niet algemeen gebruikelijk is en dat de leerling liever een van de bestaande talen zou moeten leren omdat dat hetgene is wat hij later zal nodig hebben, vonden wij niet erg groot: als je eenmaal een programmeertaal kent is het leren van een volgende niet moeilijk meer. Bovendien komen en gaan programmeertalen, en is er alle kans dat de leerling zich later moet gaan bedienen van eèn programmeertaal die er nu nog niet eens is.

De toepassingen verdienen veel aandacht. Niet alleen de kleine toepassingen die gemakkelijk programmeerbaar zijn, maar ook en vooral de grote toepassingen rondom ons heen waaruit het belang en de interessantheid van computers

duidelijk wordt. Dit zijn de toepassingen waarop criteria (a) en (b) van toepassing zijn. Dit ook zijn de problemen waar algoritmiek in zijn ware setting aan het licht treedt, en dit is niet het geval met kleine programmeeropgaven.
Bij deze grotere toepassingen komt men in aanraking met de kwestie van het maken van een *model* van de werkelijkheid. Men kan geen berekeningen maken aan de werkelijkheid zelf, maar de werkelijkheid moet *gerepresenteerd* worden door een computermodel en aan dit model worden de berekeningen gemaakt. Dit heeft twee belangrijke implicaties. De eerste betreft weer de relativiteit van computerresultaten: deze zijn ook niet beter dan het model waaraan de berekening plaats vond. Het model stelt immers hoogstens een *deel* van de werkelijkheid voor en elke invloed die dit deel van de werkelijkheid ondergaat van gebeurtenissen er buiten kunnen niet in de berekende resultaten weerspiegeld worden. De tweede implicatie ligt in het vlak van criterium (d). Een bekwaamheid om relevante modellen van de werkelijkheid te bouwen is belangrijk bij vele onderwerpen op school en daarna. Modelbouw is niet eenvoudig. Het betekent onderscheiden wat belangrijk is (en daarom in het model moet worden opgeomen) en wat niet (en kan worden weggelaten). De aantrekkelijkheid van deze modelbouwerij in de computerkunde is de nauwe relatie ervan met het alledaagse leven en het feit dat men er geen moeilijke theorieën bij nodig heeft (zulks in tegen- stelling tot de situatie in bijv. natuurkunde en scheikunde).

Samenvattend: computerkunde bij het AVO moet zich bezighouden met het organiseren van processen met een computer; er zijn dan zeer wenselijke neveneffecten.

4 *Schets leerplan voor computerkunde*

De voorafgaande beschouwingen hebben ons tot een leerplan geleid dat ik hier slechts beknopt wil schetsen. Nadere uitwerking ervan vindt men in [3].

(I) *Elementaire algoritmische begrippen en hun realisatie op een computer.*
(a) geheugen en waardetoekenning
(b) aritmetische uitdrukkingen
(c) in- en output opdrachten
(d) vertakking en samenvloeiing
(e) cyclus
(f) rij.
Deze onderwerpen dienen zowel in termen van blokschema's als van een eenvoudige programmeertaal gestalte te krijgen en aan tal van eenvoudige voorbeelden te worden verduidelijkt; door de leerlingen zelf geschreven programma's dienen op een computer verwerkt te worden. Dit deel I zou zoiets als 20 lessen moeten beslaan.

(II) *Algoritmen van hoger plan.*
Dit omvat het opstellen van blokschema's voor problemen waarvoor complete programma's te lang zouden worden. De blokken van deze blokschema's stel-

len elk op zich weer een algoritmisch proces voor waarvan de leerling zich op dit moment kan voorstellen dat er een programma voor te schrijven is of waarvoor misschien in het voorafgaande al programma's geschreven zijn.
In deze samenhang zou de subroutine ter sprake kunnen komen maar we hebben daarin niet veel nut gezien. De subroutine vergt vrij wat uitleg, en het is moeilijk om voorbeelden te bedenken waarin de subroutine op voor de leerling relevante wijze gebruikt wordt.
Ook is nu het moment aangebroken om wat meer aandacht te geven aan algoritmen die helemaal niet computer-georiënteerd zijn maar aan het dagelijks leven ontleend.

(III) *Principes van belangrijke computertoepassingen.*
(a) personeelsadministratie of burgerlijke stand
(b) bank- of girosysteem
(c) reserveringssysteem
(d) simulatie
(e) kunstmatige intelligentie
(f) operaties op teksten (string handling).
Alleen de principes zijn van belang. Een compleet giroprogramma zal wel duizenden opdrachten bevatten. Maar het principe kan uitgelegd worden met een programma van twintig opdrachten. Een meer verfijnd girosysteem kan dan besproken worden met stroomdiagrammen zoals onder (II) is uiteengezet, programmeeropgaafjes kan men aan de blokken van deze stroomdiagrammen ontlenen en op deze wijze krijgen de leerlingen heel wat inzicht zonder overdreven programmeerinspanning. Overeenkomstige opmerkingen kunnen gemaakt worden t.a.v. de andere toepassingen. Dit is ook een indicatie dat men de onderdelen (II) en (III) tezamen zou kunnen doen.

Dit is klaarblijkelijk een erg bescheiden programma. Toch verwachten we dat dit programma, dat minder dan 2 jaaruur vergt, duidelijk inzicht en bekwaamheid aan een groot aantal leerlingen kan geven. Dit laatst kan zeker niet gezegd worden van vele veel kostbaarder onderwerpen. Dit plaatst computerkunde in een unieke en attractieve positie.

5 *Wie onderwijst computerkunde en aan welke leerlingen*

Het is een tamelijk controversiële vraag wie de juiste man (of vrouw) is om computerkunde te onderwijzen en ook welke status dit onderwerp in het schoolprogramma moet hebben.
Sommigen menen dat het een apart vak met een aparte docent moet zijn. Naar mijn mening moet dit echter beslist niet. Er moeten niet teveel verschillende onderwerpen op school zijn. Al te lang hebben we gezucht onder een groot aantal vakken en vakjes die duidelijk samen hangen zoals geschiedenis, staatsinrichting en economie; natuurkunde en mechanica; algebra en meetkunde; maar waarvan de kennelijke samenhang niet uit de verf kwam doordat ze als

verschillende vakken en door verschillende leraren gegeven werden. Gelukkig is er tegenwoordig eerder een streven naar integratie dan naar differentiatie en dat moet niet door computerkunde doorbroken worden. Juist niet door computerkunde, want als er één vak is dat relaties met vele andere vakken heeft dan is het wel computerkunde.

Dit laatste argument laat velen in de andere richting doorslaan. Men moet het laten geven van computerkundeonderwijs niet beperken tot leraren van een bepaald vak, en in het bijzonder niet tot de wiskundeleraren; wanneer de leraar Frans iets van computers afweet moet hij er maar over vertellen, en idem de leraar scheikunde etc., zo zeggen zij.

Tot op zekere hoogte ben ik het hier wel mee eens. Het is inderdaad zeer belangrijk dat in vele vakken het mogelijke gebruik van computers duidelijk gemaakt wordt, omdat de leerling in zijn latere leven de computer in zo velerlei samenhang zal tegenkomen. Het is ook zeer belangrijk omdat een vak meer operationeel (zie 2) voor de leerling wordt en meer reliëf krijgt wanneer hem de computerimplicaties van het vak getoond worden. Vanzelfsprekend hangt dit in sterke mate af van de toevallige leraar die een vak onderwijst.

De vraag is echter: wie zal de leerling de eerste stappen naar de computer laten zetten? In welk vak zal deze inleiding een plaats krijgen? Want het is beslist ongewenst om deze inleiding te laten afhangen van de toevallige leraren die de verschillende vakken hebben. Hoe eenvoudig deze inleiding ook moge zijn (zie 4), het is een onderwerp met een eigen structuur en methodologie, en iemand die wat van programmeren af weet en weet hoe een computer te gebruiken voor zijn eigen doeleinden is niet ipso facto gekwalificeerd om deze inleiding te onderwijzen.

Het is duidelijk dat van alle vakken op school de wiskunde het vak is dat qua structuur en methodologie het nauwst verwant is met een inleiding tot computerkunde zoals in 4 geschetst. Ook is het waar dat de wiskundeleraar het meest ervaren is om dit soort manipulaties en structuren te onderwijzen en daarmee ook om gebrek aan begrip bij de leerlingen op te sporen en te verhelpen.

Het onderwijs in de principes van de toepassingen zie ik graag in een hand, om de daarbij optredende samenhang aan het licht te brengen, en weer is het de wiskundeleraar die ik dit het liefste zie doen. Hij houdt op waar het interessant begint te worden voor de professional in wiens vakgebied de toepassing ligt. Dit opent de mogelijkheid voor een gelukkige samenwerking en taakverdeling.

Het zou echter ook heel goed zijn voor het wiskundeprogramma zelf als de computerkunde daarin een plaats kreeg. Het wiskundeprogramma immers neigt steeds meer in een abstracte richting; deze realiteitsinjectie kan een sterke impuls in een meer toegepaste richting geven.

Om deze redenen ben ik van mening dat het gerechtvaardigd is te trachten de computerkunde in het wiskundeprogramma onder te brengen.

Hierbij rijst natuurlijk vanzelf de vraag of dan de wiskunde extra uren moet krijgen, en waar die vandaan moeten komen. Ik vraag me evenwel af of dit inderdaad nodig is.

Enerzijds dient men hierbij te overwegen dat de wiskunde altijd voor een belangrijk deel gemotiveerd is door zijn vormende waarde. Computerkunde heeft een vormende waarde die deels in hetzelfde vlak ligt als die van de wiskunde, maar de vormende waarde van computerkunde komt naar mijn overtuiging beter tot zijn recht door de veel grotere mogelijkheden voor creatief bezig zijn die dit vak de leerlingen biedt.
Voorts werd de wiskunde vooral gemotiveerd door haar toepasbaarheid. In diverse toepassingsgebieden heeft de computer evenwel de wiskunde verdrongen. Een en ander maakt dat een claim van de computerkunde op wiskunde uren zeker overwogen dient te worden, mede in het licht van de opmerkingen over optimalisatie aan het eind van 1.
Anderzijds zou het mij niet verwonderen wanneer computerkundeonderwijs een zodanig gunstige invloed op de instelling van de leerlingen heeft (zie hierboven onder criterium (d)) dat, ook al neemt men de tijd voor computerkundeonderwijs uit de wiskunde-uren, toch het wiskundeprogramma niet hoeft te worden ingekrompen. Er zijn reeds enkele positieve indicaties in deze richting Het zou zeer wenselijk zijn wanneer de leraren die nu reeds met computerkunde experimenteren, over dit punt hun licht eens zouden willen laten schijnen.
Resumerend: het is zeer gewenst dat de wiskundeleraar de inleiding geeft, en dat alle andere leraren maximale aandacht aan het verschijnsel computer schenken in hun lessen.

Tenslotte nog de vraag aan wie computerkundeonderwijs gegeven moet worden. In het voorafgaande ligt besloten dat alle leerlingen dit onderwijs moeten krijgen en wel in een niet al te laat leerjaar, dit laatste vooral in verband met de vormende waarde van het vak. Wij denken aan hoogstens de derde klas van het AVO.

6 *Ervaringen*

De ervaringen in de klas zijn nog gering. Wat we tot dusverre hebben gezien stemt ons echter optimistisch. De leerlingen zijn in grote meerderheid enthousiast, en komen tot niet vermoede activiteiten. Eigen problemen worden bedacht, en er ontstaat teamwork. Wij zouden het zeer op prijs stellen als ervaringen van tijd tot tijd een plaats in dit tijdschrift zouden vinden.

LITERATUUR

[1] Rapport over de wenselijkheid en mogelijkheid van het invoeren van computerwiskunde in het onderwijs voor MAVO, HAVO en VWO. Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, Utrecht 1968.

[2] Computers in higher education. Report of the President's Science Advisory Committee, Washington 1967 (het zgn. Pierce report).

[3] C. A. C. Görts, S. G. van der Meulen, A. van der Sluis, J. R. Zweerus: Computerkunde voor AVO en VWO. Wolters-Noordhoff, Groningen 1970.

[4] A. van der Sluis: Onderwijs in computerkunde. In: J. H. Wansink, Didactische Oriëntatie voor wiskundeleraren, deel III, p. 276–315, Wolters-Noordhoff, Groningen 1970.

Spel met een alfabet van vier letters

G. KROOSHOF
Groningen

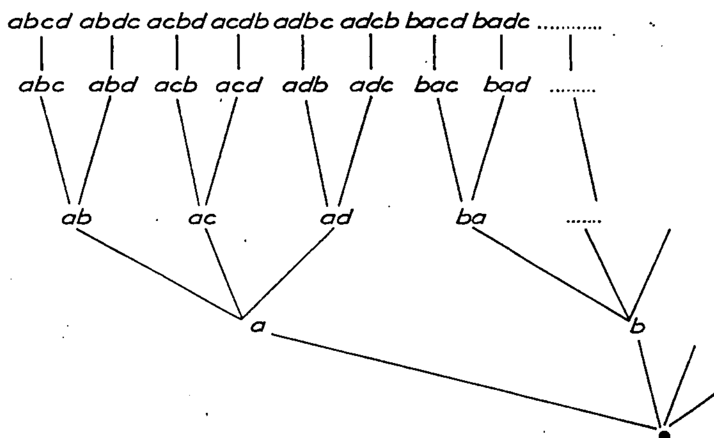
Het Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public in Frankrijk heeft het vorige jaar een extra nummer gewijd aan het wiskundeonderwijs in de 'sixième'.
Aan dat nummer (48e jrg., nr. 269-270) ontleenden we het volgende artikeltje van Mme Chouchan.

Met de klas, die in enkele groepen is verdeeld wordt het volgende spel gespeeld. We nemen deel aan een expeditie in een ver vreemd land, waarvan de taal slechts woorden kent, die zijn samengesteld uit de letters van het alfabet *a*, *b*, *c*, *d*.
We moeten een woordenboek samenstellen, waarin alle woorden zijn opgenomen, die met deze vier letters gevormd kunnen worden.

Eerste fase: de groepen gaan vol ijver aan het zoeken, een groot aantal leerlingen werkt in het wilde weg en nogal koortsachtig.
Eén groep: 'We schrijven eerst alle woorden op die beginnen met *a*'. Een andere groep: 'we beginnen met alle woorden van vier letters.'

Tweede fase: er openbaren zich bij verschillende groepen verschijnselen van ongerustheid: 'er komt nooit een einde aan'.
Een leerling loopt naar het bord en schrijft op *aaabacdaaaba*; er ontwikkelt zich een gesprek: 'we moeten de spelregels nauwkeuriger vaststellen, we moeten herhalingen verbieden, we moeten het aantal letters per woord beperken bijvoorbeeld tot twee.'

Derde fase: als regel wordt vastgesteld: elke letter mag ten hoogste één maal in een woord genoemd worden.
Nu moet er dus gezocht worden naar een methode, waarmee alle woorden gevonden worden zodat het zeker is dat elk woord maar één keer genoemd wordt.
Enkele leerlingen (heel weinig) maken een handig gebruik van permutaties.
De lerares stelt voor gebruik te maken van een boom, zoals die al vaker in de cursus is gebruikt. (Figuur 1).
Opmerking: Twee van de veertig leerlingen vinden het 'lege woord'.



FIGUUR 1 *Deel van de boom*

Oefeningen:

1. Een der leerlingen noemt een woord. Komt het voor in de boom? Hoe vind je het daarin? Langs welke weg? Zijn er twee wegen mogelijk? Is er steeds één enkele weg?
2. Is het zeker dat er geen twee identieke woorden in de boom voorkomen? Waarom?
3. Heeft men het complete woordenboek gevonden?

Enkele leerlingen nemen zich voor een plaat in de klas op te hangen, waarop de boom en de spelregel zijn afgebeeld.
Later zou het blijken dat deze goed te pas kwam bij het behandelen van deelverzamelingen.

Kalender

wo 25 november: MC(2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O) 20.00 uur: in de serie 'Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht' Prof. Dr. G. J. Leppink over 'Een toepassing van de theorie van de concurrerende risico's.

wo 16 december: MC (serie als boven) 20.00 uur: Prof. Dr. E. W. Dijkstra over 'Bewijsbaarheid van programma-correctheid'.

za 19 december: Jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren in het Transitorium, de Uithof Utrecht. Aanvang 10.30 uur. Agenda op blz. 107 in dit nummer.

Leonhard Euler's

Vollständige Anleitung zur Algebra

Dr. A. J. E. M. SMEUR

Breda

Hoewel zeker niet zijn belangrijkste werk is Euler's (1707–1783) *Algebra* wel zijn meest gelezen en verspreide werk geweest. Euler, geboren in Bazel waar hij wiskunde studeerde bij Johann (I) Bernoulli, was van 1727 tot 1741 verbonden aan de Academie te St-Petersburg, daarna tot 1766 aan die van Berlijn en dan weer opnieuw aan die te St-Petersburg. Daar is in 1768 zijn *Algebra* verschenen in het Russisch en twee jaar later in het Duits. In deze uitgave, nu dus 200 jaar oud, heeft het boek zijn grote bekendheid gekregen. Het is geregeld heruitgegeven; de laatste Duitse uitgave is van 1959. In 1774 al bezorgde Lagrange (1736–1813) een Franse editie. Het werk is ook nog in verschillende andere talen verschenen.

De uitgave van 1770 wordt door de uitgever ingeleid met:

> Man überliefert hiermit denen Liebhabern der höhern Rechenkunst ein Werck, davon schon vor zwey Jahren eine russische Übersetzung zum Vorschein gekommen ist. Die Absicht des weltberühmten Verfassers bey demselben war, ein Lehrbuch zu verfertigen, aus welchem ein jeder ohne einige Beyhülffe die Algebra leicht fassen und gründlich erlernen könne.

Deze opzet is geslaagd. De talrijke heruitgaven geven de zekerheid, dat enorm velen uit het werk de algebra geleerd hebben. Men bedenke hierbij, dat er wel een overvloed aan boekjes was, die het meer elementaire rekenen leerden maar dat vervolgboeken daarop ontbraken. De Latijnse scholen, die voorbereidden op de universiteit, hielden zich streng aan het 'Latijnse'; wiskunde-onderwijs gaven ze amper. Voor de geïnteresseerden bestond geen samenvattend werk totdat Euler's *Algebra* verscheen.

Het hierna volgende kan slechts een onvolledig beeld van de inhoud geven.

Deel I.

1 De hoofdbewerkingen met getallen en eentermen (einfache Gröszen). Bij aftrekken komen de negatieve getallen ter sprake, bij vermenigvuldigen het ontbinden in priemfactoren, bij delen de rationale getallen en bij wortels de irrationale en de imaginaire getallen. Tenslotte volgen negatieve en gebroken exponenten en de logaritmen, speciaal voor de basis 10, met het gebruik van de tafel.

2 Bewerkingen met veeltermen (zusammengesetzte Gröszen).
Hierbij behandelt hij onder andere ook de reeksontwikkelingen, verkregen door delen, van $1/(1-a)$ en $1/(1+a)$, waarbij hij echter geen convergentievoorwaarde beschouwt zodat we, tot onze verbazing, bij

$$\frac{1}{1+a} = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+\ldots$$

kunnen lezen;

Setzt man $a = 1$, so erhält man die merkwürdige Gleichheit:
$1/(1+1) = \frac{1}{2} = 1-1+1-1+1-1+\ldots$ usw. bis in Unendliche, was widersinnig zu sein scheint; denn wenn man irgendwo mit -1 aufhört so gibt diese Reihe 0; hört man aber irgendwo mit $+1$ auf, so gibt sie 1. Daraus aber läszt sich die Sache begreifen, da, wenn man ohne Ende fortgehen und weder bei -1 noch bei $+1$ irgendwo aufhören musz, weder 1 noch 0 herauskommen kann, sondern etwas, das dazwischen liegt, also $\frac{1}{2}$.

Zo'n beschouwing was voor die tijd echter niet vreemd; pas later is men streng op convergentie gaan letten.

3 Verhoudingen en evenredigheden.
Hierbij worden ook de reken- en meetkundige rijen behandeld, de repeterende breuken en de intrestrekening.

Deel II.

1 Algebraïsche vergelijkingen.
Behandeld worden de vergelijkingen der eerste, tweede, derde en vierde graad dus die, welke op te lossen zijn. Daarna volgt nog een hoofdstuk over het benaderen van oplossingen.
Tot zover herkent men gemakkelijk, enkele onderwerpen daargelaten, onze middelbare schoolalgebra oude stijl. Wat daarna volgt valt daar geheel buiten, namelijk:

2 Von der unbestimmten Analytik.
Euler behandelt het oplossen van stelsels vergelijkingen met meer onbekenden dan vergelijkingen. Er zijn dan nog wel bijvoorwaarden, bijvoorbeeld, dat de oplossingen natuurlijke getallen moeten zijn. (Het betreft dus vraagstukken waarvan in de 16e- en 17e eeuwse rekenboeken de oplossingen in de zogenaamde 'regula coecis' gegeven werden). Enkele voorbeelden mogen dit toelichten:

Ein schwieriges Beispiel ist folgendes: VIII Aufgabe. Man suche eine Zahl N, die durch 39 dividiert 16 und durch 56 dividiert 27 übrig läszt. ($N = 2184x+1147$, $x = 0, 1, 2, \ldots$)

Een ander probleem bijvoorbeeld is na te gaan voor welke x een veelterm $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ bij gegeven a, b, c, d, e waarvan er ook enkele 0 mogen zijn, een kwadraat of een derde macht is. Een bijzonder geval is de vergelijking $m^2 = an^2+1$ bij gegeven a (geheel maar geen kwadraat) op te lossen in gehele getallen m en n. Euler schrijft:

Hierzu hat ein gelehrter Engländer namens Pell eine sehr sinnreiche Methode erfunden, die wir hier erklären wollen.

De genoemde vergelijking draagt sindsdien op gezag van Euler, maar ten onrechte, de naam van John Pell (1611–1685).
Weer andere problemen zijn de beide volgende, afkomstig van de Franse wiskundige J. Ozanam (1640–1717). Het zogenaamde zes kwadratenprobleem: vind drie getallen x, y en z zo, dat de som en het verschil van twee ervan weer kwadraten zijn. Één oplossing, de eenvoudigste, is: $x = 434657$, $y = 420968$, $z = 150568$. Het drie kwadratenprobleem vraagt drie kwadraten x^2, y^2 en z^2 te vinden zo, dat de som van twee ervan weer een kwadraat is ($x = 6325 = 11 \cdot 23 \cdot 25$, $y = 5796 = 12 \cdot 21 \cdot 23$, $z = 528 = 3 \cdot 11 \cdot 16$, en nog andere oplossingen).
Van Diophantos (c 275 v. Chr.) is het probleem: zoek bij gegeven a en b een x zo, dat $a^3+b^3+x^3$ weer een derde macht is (als $a = 1$, $b = 2$ dan voldoet $x = \frac{17}{7}$; $a = 2$, $b = 3$ dan voldoet $x = \frac{124}{19}$).
In het oplossen, met elementaire methoden, van problemen als de hiergenoemde zijn Euler, en ook Lagrange, onovertroffen grootmeesters geweest.
Ten slotte geven we nog een indruk van Euler's standpunt ten aanzien van imaginaire getallen. Bij de wortels komen ze ter sprake:

Dieser Umstand führt uns zum Begriff solcher Zahlen, die ihrer Natur nach unmöglich sind und gewöhnlich *imaginäre* oder *eingebildete Zahlen* genannt werden, weil sie blosz in der Einbildung vorhanden sind.

Bij de vierkantsvergelijkingen merkt Euler op, dat de wortels 'onmogelijk' (complex) kunnen zijn maar dat hun som en product dan wel bestaan (reëel zijn). Zijn er wortels, dan zullen ze vaak irrationaal zijn maar:

in diesen Fällen kann man immer näher zu ihrem wahren Werte gelangen, wie oben bemerkt worden ist, während bei imaginären Ausdrucken, wie etwa $\sqrt{-5}$, auch keine näherung stattfindet, da 100 davon ebensoweit entfernt ist wie 1 oder irgendeine andere Zahl.

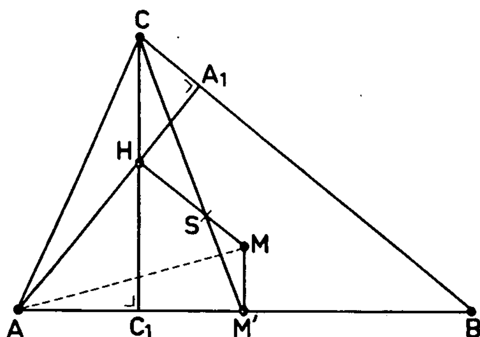
Men ziet, dat de imaginaire getallen wel geaccepteerd werden en dat er mee gerekend werd. Maar als gelijkwaardig naast de reële getallen werden ze nog niet beschouwd; een meetkundige afbeelding ervan ontbrak. Dat stamt van de na Euler komende generatie.

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA
Delft

LXXVIII Euler geometer.

Het naar omvang, veelzijdigheid en hoedanigheid verbijsterende werk van Euler strekt zich uit over de gehele in zijn tijd beoefende wiskunde en haar toepassingen. Hij zal wel de mathematicus zijn aan wiens naam de meeste methodes, stellingen en vooral vergelijkingen zijn verbonden. Ook in de meetkunde komt men hem tegen: er is een rechte van Euler in de driehoek, de formule van Euler voor de afstand van de middelpunten van de om- en de ingeschreven cirkel, de stelling van Euler over de aantallen hoekpunten, ribben en zijvlakken van een convex veelvlak, er zijn de drie hoeken van Euler die de onderlinge stand van twee rechthoekige assenkruisen bepalen; een fundamentele relatie in de krommingstheorie der oppervlakken staat op zijn naam.
De in 1911 begonnen en uiteraard langzaam voortgegane grootse onderneming, de uitgave van Euler's *Opera Omnia,* is in elk geval zover gevorderd dat wij zijn meetkundige werk gemakkelijk kunnen overzien. De delen 26 (1953), 27 (1954), 28 (1955) en 29 (1956) van de eerste serie (die de *mathematische* werken bestrijkt) zijn onder de gemeenschappelijke titel *Commentationes geometricae* (vol. I, II, III, IV) door de redacteur A. Speiser gewijd aan wat deze als geometrie heeft aangemerkt.
Wie er kennis van neemt ontmoet vele artikelen over differentiaalmeetkunde (van vlakke krommen, stelsels van dergelijke krommen, ruimtekrommen en oppervlakken) en veel (vooral sferische) trigonometrie.
De algemene indruk is dat Euler eigenlijk meer geïnteresseerd is in de differentiaalvergelijking of de algebra waartoe een geometrische opgave aanleiding geeft dan tot de meetkunde als zodanig. 'Meetkundige' redeneringen zoals die in de negentiende eeuw tot grote bloei kwamen zijn bij hem een grote zeldzaamheid. Zijn hart is niet aan de figuur maar aan het getal verpand. De aanschouwing wijkt terug tegenover een fenomenale rekentechniek. Wij lichten dat toe door een tweetal voorbeelden.
'De rechte van Euler' vat de stelling samen dat in een driehoek het middelpunt M van de omgeschreven cirkel, het zwaartepunt Z en het hoogtepunt H collineair zijn. Het thans gangbare bewijs gaat ongeveer als volgt. (fig. 1) Men



FIGUUR 1

heeft $CH = CA_1/\sin\beta = b\cos\gamma/\sin\beta = 2R\cos\gamma$, terwijl $MM' = R\cos\gamma$, zodat $CH = 2MM'$. Is nu S het snijpunt van de zwaartelijn CM' en HM dan is $CS : SM' = CH : MM' = 2$, waaruit volgt dat S met Z samenvalt.

Het bewijs dat Euler zelf geeft van het bestaan van de later naar hem genoemde rechte komt voor in de verhandeling *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, verschenen in de *Novi commentarii* van 1765 en herdrukt in deel 26 der Opera (p. 139–157). De in onze gedachtengang beslissende configuratie $CHMM'$ komt er niet in voor. Euler's probleem is ruimer: hij wil de onderlinge afstanden der vier klassieke merkwaardige punten M, H, Z en het middelpunt I van de ingeschreven cirkel uitdrukken in de zijden van de driehoek. Hij doet dat zeer systematisch, kiest A als oorsprong en AB langs de X-as van een rechthoekig assenstelsel, bepaalt de coördinaten van elk der vier punten en dan met Pythagoras het kwadraat van elk der zes afstanden. Goniometrische verhoudingen worden niet gebruikt. De coördinaten van M zijn $\frac{1}{2}c$ en $c(a^2+b^2-c^2)/8O$, die van H:$(-a^2+b^2+c^2)/2c$ en $(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)/8cO^2$ en die van Z : $(-a^2+b^2+3c^2)/6c$ en $2O/3c$. Het berekenen der afstanden vergt nog heel wat werk, waarbij Euler zoals te verwachten was de symmetrische functies van de zijden: $p = a+b+c$, $q = bc+ca+ab$, $r = abc$ introduceert.

Hij vindt voor ZM^2:

$$\frac{r^2}{16O^2} - \tfrac{1}{9}(p^2 - 2q), \tag{1}$$

voor HZ^2 vier maal zoveel en voor MH^2 negen maal zo veel, waaruit de stelling volgt.

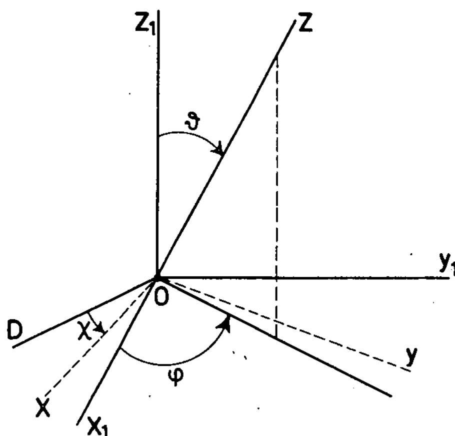
Voor belangstellenden voegen wij nog zijn drie andere uitkomsten toe:

$$MI^2 = \frac{r^2}{16O^2} - \frac{r}{p}\ , \tag{2}$$

$$ZI^2 = -\tfrac{1}{9}p^2 + \tfrac{5}{9}q - \frac{2r}{p}\ , \tag{3}$$

$$HI^2 = \frac{r^2}{4O^2} - p^2 + 3q - \frac{4r}{p} , \tag{4}$$

waarvan de eerste overeenkomt met het bekende resultaat $MI^2 = R^2 - 2Rr$, dat overigens ter aangehaalder plaatse niet expliciet wordt vermeld.
Euler voegt nog het probleem toe de driehoek te construeren als de vier merkwaardige punten, uiteraard met de voor H, Z en M vastgestelde bijzondere ligging, gegeven zijn; hij herleidt het tot een kubische vergelijking (met a, b en c tot wortels), die hij met numerieke voorbeelden nader onderzoekt.
Ons tweede voorbeeld heeft betrekking op 'de hoeken van Euler', zoals die in de mechanica van het starre lichaam worden ingevoerd. Om de stand van het assenkruis $OXYZ$ t.o.v. $OX_1\ Y_1\ Z_1$ vast te leggen (fig. 2) gebruikt men de



FIGUUR 2
Voor de letter χ dient gelezen te worden ψ.

hoek ϑ tussen OZ_1 en OZ, en de hoek φ tussen OX_1 en de projectie van OZ op het vlak $OX_1\ Y_1$. Daarmee is de stand OZ en dus ook van het vlak door O loodrecht op OZ bepaald; is OD de doorgang van dit vlak met $OX_1\ Y_1$ dan wordt OX (en bijgevolg OY) door de hoek ψ gegeven.
De drie hoeken ϑ, φ en ψ, aldus aanschouwelijk gedefinieerd, worden naar Euler genoemd. Door van langs OX, OY en OZ geplaatste eenheidsvectoren de componenten langs OX_1, OY_1 en OZ_1 te bepalen, worden de volgende transformatieformules verkregen:

$$x_1 = x(\cos\psi \sin\varphi + \sin\psi \cos\varphi \cos\vartheta) + y(-\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi \cos\vartheta)$$
$$+ z \cos\varphi \sin\vartheta,$$

$$y_1 = x(-\cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \cos\vartheta) + y(\sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\vartheta)$$
$$+ z \sin\varphi \sin\vartheta, \tag{5}$$

$$z_1 = -x \sin\psi \sin\vartheta - y \cos\psi \sin\vartheta + z \cos\vartheta.$$

In de aan de geometrie gewijde delen van Euler's werken hbben wij Fig. 2 en de formules (5) niet aangetroffen.

Van bevriende zijde[1]) maakte men mij er op echter attent dat de laatste voorkomen in van de 1e serie het, in 1921 verschenen, 6e deel, dat de titel *Commentationes algebraicae* draagt en op p. 287–315 een herdruk bevat van de uit 1770 daterende verhandeling *Problema algebraicum ob affectiones prorsis singulares memorabile.* Het gaat daar om het oplossen van een probleem, dat, zoals Euler opmerkt, met het vervaardigen van een magisch kwadraat verwant is, namelijk (zoals wij nu zeggen) het opstellen van een orthogonale matrix, dus een vierkant schema waarbij de som van de kwadraten der elementen van een rij of kolom gelijk aan één is, en de som der producten van overeenkomstige elementen van twee rijen (of kolommen) gelijk aan nul.

Euler merkt wel is waar op (p. 290) dat een 3×3-schema overeenkomt met dat wat bij een tranformatie van rechthoekige assenstelsels optreedt, maar hij maakt van deze meetkundige begeleiding geen gebruik en ziet het vraagstuk als een probleem der algebra. Hij bewijst eerst dat de 12 gestelde condities met 6 onafhankelijke vergelijkingen gelijkwaardig zijn, zodat hij nog $9-6 = 3$ vrije parameters mag verwachten. Voorts toont hij aan dat (zoals wij nu zeggen) elk element van de matrix gelijk is aan zijn minor. Met $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$ als leidende gedachte stelt hij dan $a_{11} = \cos\alpha$, zodat $a_{12}{}^2+a_{13}{}^2 = \sin^2\alpha = a^2{}_{21} + a^2{}_{31}$ waaraan hij voldoet door $a_{12} = \sin\alpha\cos\beta$, $a_{13} = \sin\alpha\sin\beta$, $a_{21} = \sin\alpha\cos\gamma$, $a_{31} = \sin\alpha\sin\gamma$. De getallen a_{22}, a_{23}, a_{32} en a_{33} zijn nu nog open. Door elk van hen gelijk te stellen aan zijn minor verkrijgt men vier *lineaire* vergelijkingen voor deze onbekenden en zo vindt Euler gemakkelijk het gehele, met (5) equivalente schema. De hoeken α, β en γ zijn in deze gedachtengang formele parameters over de meetkundige zin waarvan niet wordt gerept.

Volledigheidshalve zij opgemerkt dat Euler ook voor $n = 4$ en voor $n = 5$ de algemene gedaante van een orthogonale matrix afleidt, zij het met een weinig overzichtelijk resultaat. Het zou nog bijna een eeuw duren eer Cayley (in 1855) op vernuftige wijze voor willekeurige n een oplossing gaf.

Wij hebben gezien dat de 'hoeken van Euler' door de betrokkene niet op een aanschouwelijke, maar op een formele wijze zijn ingevoerd. Zij worden reeds lang in de mechanica van het starre lichaam, dus bij de beweging van de tol toegepast. Wie echter verwacht ze in het aan de mechanica gewijde samenvattende werk van Euler (de befaamde *Theoria motus*) aan te treffen, zoekt te vergeefs. In de Appendix van dit werk gaat de schrijver uitvoerig in op de plaatsbepaling van een om een vast punt O bewegend lichaam en daarin komt uiteraard eveneens de orthogonale matrix naar voren, maar ook hier past Euler een (andere, meer symmetrische) formele methode toe. De aandacht gaat dan spoedig over op een ook van hem afkomstige stelling, die uitspreekt dat elke verplaatsing door één enkele rotatie, om een bepaalde as en over een bepaalde hoek, kan worden voortgebracht.

---

[1]) M. Tienstra, Orthogonal transformation matrices. Diss. T.H. Delft (1969), p. 11.

Leerplan in

(of hoe u door aandelen spare

Sparen?
De gulden wordt elke dag minder waard. Slechts weinig rentepercentages kunnen daar tegen op. Wat dan. Risico's nemen met investeringen? Dat kan geld kosten.

Beleggen in aandelen?
Aantrekkelijk. Maar hebt u tijd om elke dag beursberichten te bestuderen, uw aandelen te volgen?

Rolinco Plus-plan voor u ideaal.
Uitgerekend het mooiste Plan. Per maand betaalt u enkele tientallen guldens. Over 10, 15, 20 jaar hebt u een interessant aandelen-pakket Rolinco. En een flinke winst.

Wat is Rolinco?
Rolinco is ook internationaal een van de grootste beleggings-maatschappijen, met brééd gespreide belangen in alle grote groeifondsen ter wereld. Met gekwalificeerde beleggings-experts. Zwart op wit kunnen wij u aantonen dat Rolinco t.o.v. andere beleggingsfondsen de meest konstante en optimale groei vertoont!

Rolinco winsten zijn úw winsten.
Rolinco heeft als het ware de struktuur van een coöperatie. Als u aandeelhouder bent hebt u alle inspraak. En het volle profijt van de resultaten! Wij willen u graag uitleggen dat géén z.g. „managementcompany" met de grote winsten gaat strijken. Rolinco biedt u het laagste kostenpercentage.

Als ambtenaar verdient u een premie.
Van de Overheid krijgt u een premie als u in een aandelen-spaarplan spaart. Dat maakt het nog voordeliger. En interessant: het Plan i gebaseerd op een levensverzekering, dus gedurende de looptijd extra zekerheid voor u en uw gezin. Plus dat hierdoor het Rolinco Plus-plan de voordéligste manier is om aandelen Rolinco te verwerven. Dit kunnen wij u aantonen.

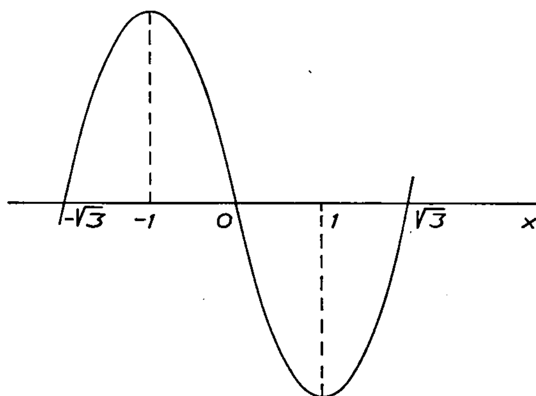
Rolinco Plus-plan

Euler, de veelzijdige, beoefende ook de meetkunde, maar zoals wij zagen, op een weinig 'meetkundige' manier. Hij is in dit opzicht verwant met Lagrange, die er in het voorwoord van zijn *Mécanique analytique* prat op gaat dat men in dit werk geen enkele figuur zal aantreffen. Te meer begrijpelijk wordt het advies dat Lagrange zijn leerlingen meegaf en dat hier gaarne wordt herhaald: 'Lisez Euler, lisez Euler'.

Korrel CLXIV

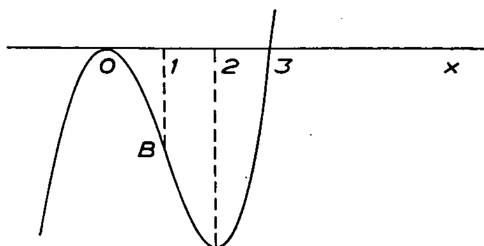
Middelpunt van een derdegraadskromme.

Nu in het meetkunde-onderwijs lijn- en puntsymmetrie steeds meer naar voren worden geschoven, ben ik er toe overgegaan hier ook meer gebruik van te maken bij de grafieken welke ik als toepassing van de differentiaalrekening pleeg te behandelen. Eerst behandel ik de 'kale' functies x^2, x^3 en x^4 waarvan de x^3 als illustratie dient dat $y' = 0$ niet altijd op een uiterste waarde behoeft te wijzen. Ik wijs bij het tekenen van de grafieken tevens op de symmetrie-*as* bij de parabolen van even graad, terwijl die van oneven graad een *punt* van symmetrie (middelpunt) hebben.



FIGUUR 1

Vervolgens komen aan de orde x^3-3x (fig. 1) en x^3-3x^2 (fig. 2). De leerlingen ontdekken de regelmaat in deze figuren en gaan zich afvragen in hoeverre deze een algemeen verschijnsel bij een derdegraadskromme is. Volledigheidshalve behandel ik er ook het – niet voor het examen verplichte – buigpunt bij. Ook al hebben zij even moeite met de meetkundige betekenis van de tweede afgeleide, de berekening van y'' is voor een veelterm snel gebeurd en voor het maken van de tekening is het nuttig te weten dat bij $y'' = 0$ gewoonlijk hol in bol (of omgekeerd) overgaat.



FIGUUR 2

Ik formuleer nu de gevoelens van de klas in de volgende

STELLING: bij een derdegraadskromme is het buigpunt middelpunt.
Bij de kromme x^3-3x ligt het buigpunt in de oorsprong en berust het bewijs eenvoudig op het uitsluitend aanwezig zijn van de oneven machten van x (een her-ontdekken van wat de leerlingen reeds in de A.M.-les hebben gehad). Dan vraag ik naar een bewijs-methode voor een algemener geval. Twee methoden komen in aanmerking:

I Breng een willekeurige lijn door het buigpunt en bewijs dat dit punt midden tussen de andere snijpunten van deze lijn met de kromme ligt;

II Zorg door translatie de oorsprong van het assenstelsel naar het buigpunt te verplaatsen.

Ik beveel methode II aan en stel voor, de berekening uit te voeren voor een iets vereenvoudigd geval, namelijk

$$y = x^3+3x^2+qx+r$$

$$y' = 3x^2+6x+q$$

$$y'' = 6x+6 \text{ dus buigpunt heeft } x_B = -1$$

Translatie in x-richting: stel $x = u-1$ leidt tot $y = u^3+(q-3)u+(r-q+2)$. Translatie in y-richting tot $v = u^3+(q-3)u$ en hierin treffen wij weer uitsluitend oneven machten aan.

En passant merken wij nog op dat voor de wortels van de vergelijking $y' = 0$ volgens een bekende worteleigenschap geldt: $x_1+x_2 = -2$ d.w.z. $= 2x_B$ of wel: de plaats van het buigpunt bevindt zich midden tussen die van de uiterste waarden!
Voor een getallenvoorbeeld is het een nuttige rekenoefening, ook methode I eens toe te passen. Zo heeft $f(x) = 2x^3-15x^2+36x+2$ als buigpunt $(2\frac{1}{2}, 29\frac{1}{2})$ en moet dus worden bewezen:

$$f(2\tfrac{1}{2}+h)+f(2\tfrac{1}{2}-h) = 2\times 29\tfrac{1}{2} \text{ voor alle } h.$$

J. Snoep
Tiel

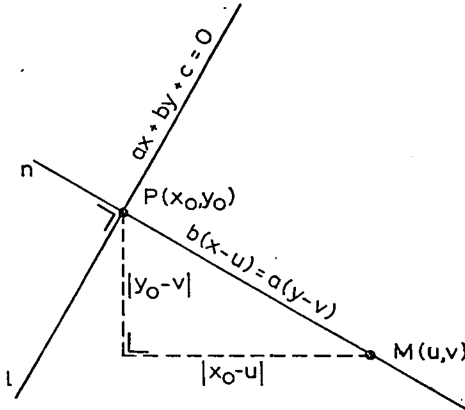
Korrel CLXV

Nog eens: de cirkelbundel (Een bijzonder geval).

In korrel CIL, Jg. 44, VII, blz. 219, wijst Buissant des Amorie terecht op de onbevredigende situatie – niet in het minst voor onze scholieren – dat er t.a.v. zo'n belangrijk onderwerp als 'cirkelbundel' in de schoolboeken geen eenstemmigheid bestaat.
Weliswaar kan men met hem van mening verschillen inzake de aangevoerde *redenen*, om de machtlijn het etiket 'bundelexemplaar' te onthouden.
Juist omdat 'Euclides' zich op het terrein der didactiek beweegt zou ik het 'didactisch aanvaardbaar' zwaarder laten wegen dan bijv. het beroep op isotrope punten, een redenering die in leerboeken als Rutgers en Barrau natuurlijk niet ontbeerd kan worden, maar die in een discussie met leerlingen eenvoudig niet kan aanslaan. Dit in tegenstelling met de voor leerlingen wel degelijk aánvaardbare these dat de rechte lijn gezien kan worden als cirkel met oneindig grote straal. Dit deed ook Schrek die zich toch wel een naam had verworven op dit gebied.
Trouwens, de schrijver van bedoelde korrel neemt toch iets van zijn betoog terug, door de 'machtlijn tezamen met de rechte op oneindig' als bundelexemplaar op te vatten, overeenkomstig de zienswijzen van Rutgers en Barrau.
Ik zie dit dan ook meer als een kwestie van naamgeving, daar de functie van de machtlijn in de bundelvergelijking immers dezelfde is als die van een ánder bundelexemplaar (cirkel). Ernstiger vind ik – in sommige schoolboeken – de uitsluiting van $C_2 = 0$ als bundelexemplaar in de uitdrukking $C_1 + \lambda C_2 = 0$. Dit is een onhoudbare discriminatie van de ene cirkel boven de andere. Wat dan, als we stellen $C_2 + \lambda C_1 = 0$? Terecht worden bundelvergelijkingen van de vorm $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$ in schoolboeken vermeden en hanteert men de vorm $C_1 + \lambda C_2 = 0$.
$\lambda = 0$ levert het exemplaar $C_1 = 0$ terwijl (zie Rutgers): 'λ nu ook de waarde ∞ kan aannemen, zodat $\lambda = \infty$ moet leiden tot $C_2 = 0$, waartoe, na deling door λ, inderdaad de substitutie $\lambda = \infty$ voert'.

Wij gaan nu over tot het 'bijzondere geval', genoemd in de ondertitel van dit opstel, nl. *het geval dat de machtlijn aan de cirkelbundel raakt.* Daartoe is wel enige aanleiding i.v.m. het 2e deel van het 1e vraagstuk An. Meetkunde van de eindexamens 1970. (hoewel er natuurlijk andere heel goede oplossingen voor dit onderdeel gekozen kunnen worden, d.w.z. zonder bundelvergelijking).
Het is licht te begrijpen dat dit geval in de meeste schoolboeken heel summier behandeld wordt en soms alléén als 'vraagstuk'. In Rutgers lezen we: 'Moet derhalve de vergelijking bepaald worden van een cirkel die o.m. een gegeven rechte $l = 0$ in een gegeven punt $P_0(x_0, y_0)$ raakt, dan behoort die cirkel tot

de bundel die $l = 0$ tot machtlijn en het punt P_0 tot puntcirkel heeft; de vergelijking van die puntcirkel is $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = 0$ en dus van de cirkelbundel: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\lambda l = 0$'.
Geven wij deze boodschap zonder meer door, dan is te verwachten dat wij een onbevredigend gevoel bij de leerlingen achterlaten. Ik zou daarom liever de volgende weg willen inslaan:



Gegeven zijn een rechte l met vergelijking

$$ax+by+c = 0 \quad (a \neq 0 \wedge b \neq 0) \tag{1}$$

en een punt $M(u, v)$. De rechte n door $M \perp l$ heeft dan als vergelijking

$$b(x-u) = a(y-v) \tag{2}$$

Is $P(x_0, y_0)$ het snijpunt van l en n, dan voldoen de coördinaten van P aan de vergelijkingen (1) en (2), zodat de beide volgende betrekkingen gelden:

$$ax_0+by_0+c = 0 \tag{3}$$

en

$$b(x_0-u) = a(y_0-v) \tag{4}$$

We stellen elk dezer leden gelijk aan $\frac{1}{2}\lambda ab$ (4a)
De door P gaande cirkel met M als middelpunt zal dus l in dat punt P *raken.*
De vergelijking van deze cirkel is:

$$(x-u)^2+(y-v)^2 = (x_0-u)^2+(y_0-v)^2 \tag{5}$$

We kunnen vergelijking (5) als volgt herschrijven:

$$\{(x-x_0)+(x_0-u)\}^2+\{(y-y_0)+(y_0-v)\}^2 = (x_0-u)^2+(y_0-v)^2,$$

of, na herleiding:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2\{(x_0-u)(x-x_0)+(y_0-v)(y-y_0)\} = 0 \qquad (6)$$

Wegens (4a) gaat dit over in:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\lambda\{a(x-x_0)+b(y-y_0)\} = 0$$

De laatste vorm in accoladen gaat wegens (3) over in: $\{(ax+by+c)-(ax_0+by_0+c)\} = (ax+by+c)$, zodat we als vergelijking van bedoelde cirkel krijgen:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\lambda(ax+by+c) = 0 \qquad (7)$$

Zijn u en v variabel, maar gebonden door de betrekking (4), dan kunnen we λ als parameter opvatten. In dat geval is (7) de *bundel*vergelijking voor cirkels die l in P raken. Hierin doorloopt λ alle reële waarden.

De volgende grensgevallen doen zich voor.

1 $\quad u = x_0 \Leftrightarrow v = y_0 \Rightarrow \lambda = 0.$

Als exemplaar van de bundel vinden we nu de 'puntcirkel': $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = 0$, de cirkel met P als middelpunt en straal nul.

2 $\quad$ Voor $\lambda \neq 0$ mogen we voor (7) óók zetten:

$$\tfrac{1}{\lambda}\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}+(ax+by+c) = 0$$

Nadert nu u (en daarmee v) tot oneindig grote waarden, dan nadert $\frac{1}{\lambda}$ tot nul, zodat we nu als 'grens'exemplaar vinden de rechte l, d.w.z. de cirkel met middelpunt op oneindig en met oneindig grote straal.
Bij deze behandeling *gaan we niet uit* van de beide basisexemplaren, maar *vinden ze* in tegendeel *terug* als grensgevallen.
Het zal een leerling weinig moeite kosten de gevallen $a = 0$ en/of $b = 0$ zélf eens als een bijzonder geval te behandelen.

J. C. van Rhijn
Vollenhove

HEREXAMENS HAVO-1970

In aansluiting op de herexamens-mavo, die in het vorige nummer nog een plaats konden vinden, drukken we hieronder de Havo-opgaven af (tijd 3 uur)

1 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de cirkel met vergelijking $x^2+y^2 = 25$ en het punt $A(5.0)$.
De lijn met vergelijking $x+2y = 5$ snijdt de cirkel behalve in A nog in een punt B.
De raaklijn in A aan de cirkel snijdt de raaklijn in B aan de cirkel in punt C.

a Bereken de coördinaten van C.

b Beschouw de parabool met brandpunt B en met richtlijn de lijn met vergelijking $x = -5$. Bewijs dat C en O op deze parabool liggen.

2 Bereken de waarden van x die voldoen
zowel aan $2+\sqrt{x-2} > \sqrt{x+6}$
als aan $2+{}^2\log(x-2) < {}^2\log(x+6)$.

3 In een regelmatige vierzijde piramide $T.ABCD$ is $AB = AT = 8$. Het zwaartepunt van driehoek BCT is het punt Z.

a Bereken de inhoud van het viervlak $BCDZ$.

b Construeer op de ribbe AT een punt X zo, dat de viervlakken $ACDX$ en $BCDZ$ gelijke inhoud hebben.

c Bereken de tangens van de hoek van de vlakken ABZ en $ABCD$.

4 De functie f is voor $0 \leqq x \leqq 2\pi$ gedefinieerd door $f(x) = 4 \sin x + \cos 2x$.

a Los op: $f(x) > 1$.

b Bereken de uiterste waarden van deze functie en onderzoek van welke aard deze uiterste waarden zijn.

5 De functies f en g zijn gedefinieerd door $f(x) = \dfrac{-x}{x+2}$ en $g(x) = x$.

a Los op: $f(x) = g(x)$.

b Teken in één figuur de grafieken van f en g.

c De lijn l raakt de grafiek van f in het punt $O(0, 0)$.
De grafiek van l heeft een tweede raaklijn evenwijdig aan l.
Van welke functie is deze tweede raaklijn de grafiek?

6 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY is gegeven de parabool met vergelijking $y^2 = 2x$.
Op de parabool ligt een punt P dat niet met O samenvalt.
De projectie van P op de Y-as is het punt Q.
Het midden van het lijnstuk OQ is het punt R.

a Bewijs dat de raaklijn in P aan de parabool door het punt R gaat.

b De raaklijn in P aan de parabool snijdt de X-as in het punt S.
Het punt P doorloopt de parabool met uitzondering van het punt O.
Stel de vergelijking op van de verzameling van de middens van de lijnstukken RS.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorlopige agenda van de jaarvergadering op zaterdag 19 december 1970 in het 'Transitorium' van het Universiteitscentrum 'De Uithof' te Utrecht.
Aanvang: 10.30 uur

1. Opening door de voorzitter, dr. J. K. van den Briel.
2. Notulen van de algemene vergadering 1969.
3. Jaarverslagen.
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing wegens periodiek aftreden van drs. J. van Dormolen en M. Kindt. Het bestuur stelt beide aftredende kandidaat.
6. Vaststelling van de contributie 1971/72.
7. Splitsing van de vergadering in twee delen.
   7.1 Voordracht van Prof. Dr. J. C. H. Gerretsen Enkele toepassingen van de Identificatietopologie
   7.2 Voordracht van G. A. Vonk Lineair programmeren
   Pauze
8. Voordracht van M. Sjamaar Gebruik van de overhead-projector bij het wiskunde-onderwijs.
9. Mededelingen over de didactiekcommissie.
10. Rondvraag.
11. Sluiting.

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1969 - 31 juli 1970

Het bestuur was dit jaar tot 22 december als volgt samengesteld:
dr. ir. B. Groeneveld, voorzitter, drs. A. J. Th. Maassen, secretaris, drs. J. van Dormolen, penningmeester, M. Kindt, L. A. G. M. Muskens, M. den Otter, dr. P. G. J. Vredenduin.

Op 22 december werd dr. ir. B. Groeneveld opgevolgd door dr. J. K. van den Briel als voorzitter, drs. A. J. Th. Maassen door drs. J. W. Maassen als secretaris en M. den Otter door L. van Beek.

De vakantiecursus van het Mathematisch Centrum werd op 12 en 13 augustus te Eindhoven en op 14 en 15 augustus te Amsterdam gehouden; het onderwerp was:
Statistiek en Waarschijnlijkheidsrekening. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is vertegenwoordigd in de adviescommissie.

Op 13 september werd in 'De Uithof' te Utrecht een ledenvergadering gehouden. Dezet vergadering was speciaal bedoeld om de nieuwe leden uit mavo-kringen met de vereniging kennis te laten maken.

De jaarvergadering is gehouden op 22 december in 'Esplanade' te Utrecht; sprekers waren: prof. dr. H. J. A. Duparc, F. Goffree, dr. P. G. J. Vredenduin en drs. E. J. Wijdeveld.
Door zeer ongunstige weersomstandigheden was het aantal aanwezigen slechts 39.

Op 30 december heeft het bestuur de mening van de algemene ledenvergadering van 22 december over de kwestie gedeeld of ongedeeld vwo aan de Raad van Leraren bekend gemaakt.

Op 3 april 1970 werd in Utrecht het achttiende Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen gehouden; de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is een van de organiserende verenigingen.

In dit verenigingsjaar werden een aantal commissies ingesteld, te weten een *nomenclatuurcommissie* bestaande uit dr. P. G. J. Vredenduin (voorzitter), dr. P. M. van Hiele, M. Kindt, D. Leujes, A. F. van Tooren en G. Tromp,

een *didactiekcommissie* bestaande uit dr. J. K. van den Briel (voorzitter), drs. H. G. B. Broekman, F. Goffree, H. G. de Jong, L. A. G. M. Muskens en J. H. G. Vaessen,

een *vwo-havo-commissie* bestaande uit dr. J. K. van den Briel (voorzitter), drs. J. van Dormolen, M. Kindt, drs. J. W. Maassen en dr. P. G. J. Vredenduin,

een *mavo-havo-commissie* bestaande uit L. A. G. M. Muskens (voorzitter), S. H. Achterop, L. Bozuwa, G. Gijssen en H. P. H. T. Zijlstra.

Het bestuur heeft dit jaar tien maal vergaderd.

Notulen van de Algemene Vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op 22 december 1969 in 'Esplanade' Utrecht.

Om 10.45 uur opent de voorzitter, dr. ir. B. Groeneveld, de vergadering; hij spreekt zijn bewondering uit voor alle aanwezigen omdat zij de barre weersomstandigheden die het personenvervoer in Nederland ontwrichten, getrotseerd hebben.

Hij heet in het bijzonder welkom dr. J. H. Wansink (erelid), dr. D. N. van der Neut, drs. B. Westerhof, E. Schmidt (inspecturs), D. Leujes, G. Krooshof (vertegenwoordigers van Liwenagel en de redactie van 'Euclides'), drs. E. Wijdeveld, F. Goffree, prof. dr. H. J. A. Duparc dr. P. G. J. Vredenduin (sprekers).

Voorzitter spreekt hierna zijn jaarrede uit; deze zal worden gepubliceerd in 'Euclides'.
Vredenduin neemt onmiddellijk na de openingsrede van de voorzitter het woord; hij acht het nodig een hiaat daarin aan te wijzen: Groeneveld hanteert vandaag voor het laatst de voorzittershamer; hij heeft hem in 1960 overgenomen van dr. Joh. H. Wansink; Wansink opvolgen was op zich al een moeilijke opgave. Vredenduin spreekt zijn bewondering uit voor de snelheid waarmee Groeneveld zich heeft ingewerkt; hij releveert het feit dat Groeneveld het leeuwenaandeel van het commissiewerk heeft gedaan; hij dankt hem voor de voortreffelijke sfeer en team geest in het bestuur.

De notulen van de jaarvergadering 1968–1969 en de jaarverslagen worden goedgekeurd; de penningmeester wordt décharge verleend; in de kascommissie worden benoemd: D. van der Meyden en T. J. J. Boogaard.

Bestuursverkiezing: zonder stemming worden gekozen: dr. J. K. van den Briel, drs. J. W. Maassen en L. van Beek.

De contributie voor het jaar 1970–1971 wordt vastgesteld op *f* 15,–.

Vervolgens vraagt de voorzitter op verzoek van de Raad van Leraren de mening van de vergadering over de kwestie 'Gedeeld of ongedeeld VWO'; hij geeft in het kort een karakteristiek van het ongedeeld VWO; hij herinnert aan het voorlopige antwoord dat het bestuur aan de Raad heeft gegeven: in het bestuur bestaat een voorkeur voor het ongedeelde VWO; het bestuur meent dat in deze kwestie voorlopig niet imperatief moet worden opgetreden.
Dr. J. Wansink: de zaak is te belangrijk om zomaar een mening uit te spreken; hij vraagt om een artikel in Euclides.
Drs. J. v. Dormolen: Raad wil voor januari 1970 een uitspraak; niemand is daarmee gelukkig. Overigens is de kwestie in de weekbladen al dikwijls aan de orde geweest.
D. Leujes vraagt solidariteit met de collegae classici die het gedeelde VWO blijven voorstaan.
Dr. D. N. van der Neut acht het prematuur een standpunt te bepalen; hij stelt voor, om experimenten te vragen.
D. L. van Zanten: Laten we ons geen mening laten afpersen; hij ondersteunt het voorstel van

van der Neut; hij vraagt of de kwestie te maken heeft met de middenschool.
Van der Neut: Men stelt alles in discussie: brugperiode, eindexamens, middenschool, ongedeeld VWO; men vraagt zich niet meer af: wat staat er in de wet?
Drs. B. Westerhof: In februari zal een conferentie over de kwestie plaats hebben; de Raad van Leraren moet daar een standpunt innemen; het is alleszins begrijpelijk dat de Raad de mening van zijn achterban vraagt.
G. Krooshof maakt aanmerking op het feit dat het bestuur zijn mening al aan de Raad kenbaar heeft gemaakt.
Van Dormolen: de Raad had gevraagd om een definitief antwoord; het bestuur heeft niet meer dan een voorlopig antwoord gegeven; het heeft beloofd de kwestie op de jaarvergadering aan de vereniging te zullen voorleggen.
E. Schmidt acht het noodzakelijk dat niet-VWO-leden van de vereniging hun stem laten horen; hij vindt het quorum van deze vergadering volslagen onvoldoende.
K. de Bruin: Wat zal de norm zijn voor het experiment? Sluit men het af, onmiddellijk na het VWO, of is men van plan de verdere successen van de oud-leerlingen te beijken?
De voorzitter belooft, de mening van de vergadering in een brief aan de Raad te zullen samenvatten.

Op verzoek van de wiskunde-sectie van het Ichthus College te Drachten wordt het probleem voor leerlingen van de huidige derde klassen ter sprake gebracht.
Zij worden namelijk, indien zij dit jaar doubleren plotseling met de moderne wiskunde geconfronteerd.
Westerhof antwoordt: Er is inmiddels een circulaire naar de scholen gegaan:
80 lerarenlessen per school zijn beschikbaar gesteld.

Vredenduin doet voorstel van orde: het aantal aanwezige leden is te klein om de vergadering in tweeën te splitsen; laat alleen prof. Duparc zijn voordracht houden.
Prof. dr. H. J. A. Duparc doet tegenvoorstel: dat zowel Vredenduin als hijzelf hun voordracht zij het wat ingekort, houden. Dit voorstel wordt aangenomen.

Hierna krijgen drs. E. Wijdeveld en F. Goffree het woord over 'Wiskunde in de basisschool'. In de middagzitting ontwikkelt prof. dr. H. J. A. Duparc 'Gedachten rondom discrete wiskunde' en spreekt dr. P. G. J. Vredenduin over 'Structuren'.

Hierna volgt de rondvraag.

D. L. van Zanten vraagt om publikatie in Euclides van de gehouden voordrachten.
Dr. D. N. van der Neut bedankt mede namens zijn ambtgenoten voor de genoten gastvrijheid; hij merkt op dat de tendentie naar vernieuwing tot uiting is gekomen in de vorm van vergaderen; hij wenst het bestuur geluk.
Zinspelend op zijn naderend afscheid, spreekt hij een persoonlijk dankwoord tot de vereniging; hij roemt de goede verstandhouding en samenwerking tussen de inspectie en de vereniging.

D. Leujes dankt de vergadering namens Liwenagel; hij groet in het bijzonder de scheidende voorzitter en secretaris.

G. Krooshof vraagt namens de redactie van Euclides reeds in september of oktober de jaarverslagen te laten vrschijnen. Hij vraagt om een betere communicatie tussen bestuur en leden. Hij oppert de mogelijkheid de vereniging ook open te stellen voor onderwijzers van de basisschool. Hij is tegen een splitsing van de vereniging in secties.

Drs. B. Westerhof merkt op dat de Pedagogische Centra worden versterkt met vakdidactische medewerkers; dat ook de vereniging begrijpe dat wij met de publikatie van de leerplannen niet klaar zijn; hij doet de vereniging de suggestie, een didactiekcommissie in het leven te roepen.
Drs. A. J. Th. Maassen geeft te kennen dat de redenen voor zijn aftreden ver buiten de vereniging liggen; hij dankt de bestuursleden voor hun vriendschap en spreekt, mede namens Groeneveld, zijn vertrouwen uit dat hun taak aan bekwame handen wordt overgedragen.

Kasoverzicht 1 augustus 1969–31 juli 1970

Inkomsten

Saldo per 1 aug. 1969:		
giro	*f* 3.833,47	
kas	309,60	
4 %-rek.	502,90	
6 %-rek.	7.000,00	*f* 11.645,97
Contributies:		
ontvangen	*f* 12.642,84	
terugbet.	288,50	12.354,34
Auteursrechten		3.402,20
Rente:		
4 %-renterek.	*f* 15,97	
6 %-bel. rek.	336,51	352,48
		f 27.754,99

Uitgaven

Abonnementen Euclides		*f* 9.277,20
Administratie en PTT		742,59
Bestuur		1.202,75
Ledenvergaderingen		1.267,51
Mavo-havo-sectiecommissie		150,55
Didactiekcommissie		276,95
Nomenclatuurcommissie		340,70
Commissie vwo-opgaven		217,30
Leesportefeuille		53,00
Boekenbonnen sprekers e.d.		215,25
Onkostenvergoeding niet-leden		550,00
Diversen		57,79
Rentederving		49,72
Voorschotten		300,00
Saldo per 31-7-70:		
giro	*f* 5.025,79	
kas	27,89	
4 %-rek.	2.000,00	
6 %-rek.	6.000,00	13.053,68
		f 27.754,99

Achterstallige contributie op 31 juli 1970: *f* 207,50

Begroting verenigingsjaar 1970-1971

Inkomsten

Contributies	*f* 20.000,00
Auteursrechten	2.500,00
Rente	400,00
	f 22.900,00

Uitgaven

Abonnementen Euclides	*f* 11.000.00
PTT	500,00
Papier e.d.	350,00
Telmachine	500,00
Schrijfmachine	450,00
Administratie materiaal	50,00
Convocaties	3.000,00
Bestuur	1.300,00
Ledenvergaderingen	2.000,00
Mavo-havo-sectie	300,00
Didactiekcommissie	800,00
Nomenclatuurcommissie	1.000,00
Commissie vwo-opgaven	200,00
Leesportefeuille	300,00
Pythagoras	100,00
Boekenbonnen sprekers e.d.	300,00
Onkonstenvergoeding niet-leden	500,00
Batig saldo	1.350,00
	f 22.900,00

De leesportefeuille

MEDEDELINGEN VOOR DE DEELNEMERS

In het najaar zullen de deelnemers aan de leesportefeuille weer een kaartje ontvangen waarop vermeld staat voor welke tijdschriften zij zich opgegeven hebben en welk bedrag zij daarvoor verschuldigd zijn.

1. Voor de lezers van '*The Mathematics Teacher*' wil ik op het volgende wijzen. Het aantal lezers van dit tijdschrift is zo groot (nml. 28), dat er (in het verleden) twee abonnementen op waren. Ik heb echter, sinds ik een jaar geleden het beheer van de portefeuille overgenomen heb, steeds maar één nummer ontvangen. Informaties bij de Nederlandse Importeur van 'The Mathematics Teacher' en bij de Administratie ervan in de Verenigde Staten hebben uitgewezen, dat het, gezien de nieuwe administratie van de National Council of Teachers of Mathematics (te Washington), niet meer mogelijk is op één naam (de mijne) een dubbel lidmaatschap te noteren. Ik heb nu een collega bereid gevonden om op zijn naam nog een abonnement te mogen noteren. Voordat een en ander zover was, was er al geruime tijd verlopen. Tot nu toe zijn aan de nieuwe abonnee nog geen nummers verzonden. Wel heb ik nu weer van het laatste nummer (mei 1970) op mijn adres twee exemplaren ontvangen. Ik kan alleen maar hopen, dat er spoedig weer geregeld twee exemplaren van elk nummer komen.
Omdat de ervaring mij geleerd heeft, dat een tijdschrift met 15 lezers geen 15 weken maar zeker 1 à $1\frac{1}{2}$ jaar onderweg blijft leek het mij niet juist het éne nummer van 'The Mathematics Teacher' aan alle lezers ervan ter circulatie te zenden. De helft der lezers ontvangt nu voorlopig het tijdschrift niet. Bij het verzoek om betaling van de jaarlijkse bijdrage zal ik bij deze lezers van 'The Mathematics Teacher' het tijdschrift tussen haakjes noteren en het natuurlijk niet in rekening brengen.

2. Als beheerder ontvang ik soms klachten van deelnemers, dat zij een tijdschrift zo laat of zo onregelmatig ontvangen. Mijn werkwijze is als volgt: als voor een nummer van een tijdschrift de volgorde der lezers bijv. aangegeven is als 2–3–7–9–. . . –30–38–39, dan wordt die voor het daarop volgende nummer 3–7–9–. . . 30–38–39–2. Ieder schuift dus een plaats naar voren behalve de voorste, die dan dus gedurende een langere periode niets ontvangt.
Hield ieder zich aan de aanbevolen leestijd van maximaal 1 week, dan zouden er geen klachten hoeven te zijn. Als beheerder heb ik de taak erop toe te zien, dat ieder zich er inderdaad aan houdt. Maar als ik tijdschriften terug krijg, ver over tijd, en constateer, dat groepen opeenvolgende lezers geen datum ingevuld hebben, kan ik verder niets doen dan de klachten naast mij neerleggen. Vandaar dus mijn verzoek, in het belang van alle deelnemers:
Overschrijd de aangegeven leestijd niet.
Vul steeds de data in.

3. Na circulatie horen de tijdschriften weer bij mij terug te komen. Van verschillende nummers mag ik echter niet eens meer verwachten, dat ze over tijd zijn; ze zijn kennelijk zonder meer kwijt. De jaargangen blijven aldus incompleet. Wilt u eens nagaan of u misschien toch nog ergens oude nummers hebt liggen en deze dan alsnog naar mijn adres sturen. Waarvoor bij voorbaat dank.

4. Wanneer er voldoende belangstelling voor is kunnen we de portefeuille uitbreiden met een abonnement op het Belgische tijdschrift '*NIKO*', een tijdschrift voor methodiek van de wiskunde. Er verschijnen 3 nummers per jaar. Van dit tijdschrift van Papy gaat nu de derde jaargang in. Willen belangstellenden zich bij mij opgeven?

Dr. A. J. E. M. Smeur
Prins Alexanderlaan 13
Breda

Boekbespreking

dr. P. M. van Hiele, Jr., K. Kok, H. N. Schuring, *VAN A TOT Z, Werkboek der wiskunde voor de tweede klas Havo-V.w.o.*, deel HV-2b, J. Muusses, Purmerend, 1970, 181 blz., *f* 13,75.

Dit deel is bestemd voor het tweede halfjaar van de tweede klas van Havo-V.w.o.-scholen waar de brugperiode ook nog in het tweede leerjaar doorloopt.
In twee maal acht hoofdstukken wordt o.a. behandeld: Translaties van grafieken, ontbinden door kwadraatafsplitsing en door 'raden', $\{(x, y)|x^2+y^2 = r^2\}$ als aanduiding van de stelling van Pythagoras, congruentie (de vijf gevallen; er is geen congruentie-axioma *zzh* en *hhh*), het bewijzen in de meetkunde (ruit, vlieger, parallellogram), verzamelingen in de meetkunde (de 'gewone'; ook de verzamelingen die met behulp van coördinaten geschreven worden), evenredigheidsmatrix (met toepassingen op de rekenliniaal), gelijkvormigheid (homothetische ligging van twee veelhoeken; de vier kenmerken voor driehoeken), grafieken gebroken functies, inleiding tot het vectorenbegrip (ook stereometrisch: blok, prisma, rechthoekige piramide).
Wie de reeds verschenen delen kent, zal ook nu weer benieuwd zijn hoe deze groep auteurs hun methode op hun geheel eigen manier uitbouwen.

W. Th. Camps

Drs. Chr. Boermeester, B. Burger, dr. P. M. van Hiele, *VAN A TOT Z, Werkboek der wiskunde voor mavo*, twee katerntjes:

m^3-2b, les 23 en les 36, 18 blz., *en*
m^3-2b, les 3 en 4 uit M^3-3a, 16 blz.,

bestemd voor het tweede leerjaar van de driejarige mavo, J. Muusses, Purmerend, 1970, elk *f* 1,50.

De auteurs van de methode VAN A TOT Z hebben om meerdere redenen (o.a. afsplitsing van het driejarig mavo vindt dikwijls pas in het derde leerjaar plaats, vrijwel alleen een verschil in moeilijkheidsgraad bij de examens voor het drie- en vierjarig mavo) gemeend pas t.z.t. met aparte deeltjes te komen voor het derde leerjaar mavo III.
Beide katerntjes zijn voor het tweede halfjaar van de tweede klas van Mavo III, en wel voor die scholen waar de splitsing in drie- en vierjarig mavo al eerder plaats vindt.
Het eerste katerntje bevat de vereenvoudigde lessen 23 en 36 uit M^4H–2b (het irrationale getal; spiegeling in een punt, rotatie); het tweede moet als slot aan deel M^2H–2b toegevoegd worden (les 3: evenredige getallen; les 4: berekeningen met behulp van de rekenliniaal).
Voor verdere informatie i.v.m. de eerste moderne examens voor het driejarig mavo (beperking van de stof uit deel M^4H–2a en M^4H–2b) verwijzen we naar Bulletin VAN A TOT Z, nr. 1.

W. Th. Camps

Drs. Chr. Boermeester, B. Burger, Dr. P. M. van Hiele, *Van A tot Z, Werkboek der wiskunde voor Mavo-Havo*, deel MH-2a, derde en vierde druk, J. Muusses, Purmerend, 1970, 165 blz., *f* 7,75.

Deze drukken zijn ongewijzigd.
In het schema van de methode van A tot Z (zie: Bulletin nr. 1) is dit deel aangeduid als M^4H-2a. De 4 van M^4H zal wel weggelaten zijn, omdat pas t.z.t. aparte deeltjes voor de Mavo-III-scholen met een éénjarige brugperiode zullen verschijnen. Hoe op deze scholen de MH-deeltjes 'verwerkt' moeten worden, vertelt Bulletin nr. 1.

W. Th. Camps

BULLETIN VAN A TOT Z, nr. 1, februari 1970, J. Muusses, Purmerend, storting *f* 0,75 op postgiro 15062 onder vermelding: Bulletin van A tot Z, nr. 1.

De auteurs van de methode VAN A TOT Z verschaffen in dit eerste nummer informatie aan de docenten die deze methode op hun scholen (scholengemeenschappen) hebben ingevoerd. Het bevat inlichtingen omtrent: Ingebouwd herhalingssysteem; aparte deeltjes voor het driejarig Mavo; motivatie van de leerlingen in de A-Z-methode; het gebruik van de A-Z-methode in de heterogene brugklassen van een scholengemeenschap voor Mavo-Havo-Vwo; schema (van de boeken) van de methode VAN A TOT Z; samenvatting van de inhoud der verschillende (18+2) delen.
Auteurs en uitgever hopen dat in toekomstige nummers van het bulletin uitwisseling zal plaatsvinden tussen docenten van scholen die met deze methode werken; de auteurs blijven graag bereid eveneens een bijdrage te leveren.
I.v.m. het centraal-schriftelijk-examen èn i.v.m. het schoolonderzoek zullen deze nummers ook hun vruchten kunnen opleveren.

W. Th. Camps

Robert T. Gregory and David L. Karney, *A collection of Matrices for Testing Computational Algorithms*, Wiley-Interscience 1969, 95/–,

This book, dedicated to Dr. A. S. Householder, presents a large collection of matrices for testing computational algorithms in linear algebra. The test matrices have been collected for the most part from the current literature and for the remaining part from four valuable private collections.
Chapter I is an introduction with a brief discussion on condition numbers.
Chapter II deals with some theorems and general methods for constructing test matrices with known inverses and determinants or eigenvalues and eigenvectors.
Chapter III contains sets of n-th order matrices (and also some matrices of a certain specified order) with their inverses, and partly also with their determinants or solutions of certain systems of linear equations. Moreover, condition numbers of the ill-conditioned matrices are given. For example, a formula for the inverse of the n-th order segment of the Hilbert matrix is given and an asymptotic formula for the condition number; moreover, the inverse and the determinant are given explicitly for $n = 2, \ldots, 10$.
The next four chapters are devoted to test matrices for the calculation of eigenvalues and eigenvectors. The matrices given in chapter IV are real symmetric, in chapter V real nonsymmetric in chapter VI complex Hermitean or non-Hermitean, and in chapter VII tridiagonal. Here again sets of n-th order matrices as well as matrices of a certain specified order are given. For each matrix, the eigenvalues and, in many cases, all or some eigenvectors are given. For many real nonsymmetric (or complex non-Hermitean) matrices, both the right and left eigenvectors are given. For some defective matrices not only the eigenvectors but also the principal vectors are given, which together make up the transformation to Jordan canonical form.
Moreover, for several matrices the tridiagonal form resulting from Householder's, Givens' or Lanczos' transformation or from the elimination method are given.
The most detailed example is a (complex) Dolph-Lewis matrix of the order 20 given with all its eigenvalues, right and left eigenvectors and the condition numbers.
The book ends with a list of 81 references a symbol table and an index. The total number of pages is about 160.
This book certainly contains a most valuable collection of test matrices and is therefore strongly recommended for numerical analysts and others interested in computational methods for solving problems in matrix algebra.

T. J. Dekker.

A. Kaplan, D. J. Lewis, *Calculus and Linear algebra*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1970, 684 blz., Vol. I, 100/-.

De auteurs beogen dit onderwerp te behandelen in twee delen. Deel I verschijnt t.z.t.
In een inleiding worden de meest elementaire zaken gerecapituleerd, waarbij ook de leer der verzamelingen niet ontbreekt.
De auteurs vermelden op blz. 6:
'The notations for sets such as $\{1\}$, $\cup$, $\cap$ will be used sparingly' en daar houden ze zich aan.
Het is wel opvallend dat auteurs van Engelstalige boeken i.h.a. een opvallend andere opvatting huldigen dan auteurs van boeken, die de laatste tijd bij ons verschijnen.
Zo worden functies in deze cursus wel als afbeeldingen gedefinieerd, maar de Papy-aanse terminologie als bijectie, injectie en surjectie ontbreken. Ook de wetenschappelijke codetaal die bij ons welig tiert en zelfs elementaire boeken voor menigeen onleesbaar maakt, ontbreekt in dit eerste deel.
Wel wordt er zorg voor gedragen, dat de lezer een behoorlijke dosis techniek onder de knie krijgt.
Hoofdstuk I behandelt de vectormeetkunde in R_2, waarbij niet van een abstract vectorbegrip wordt uitgegaan, maar gewoon van een gericht lijnstuk, en pas later van een geordend getallenpaar.
Behandeld worden: onderlinge (on)afhankelijkheid van vectoren, basis van een vectorruimte, inwendig produkt.
Minder gelukkig en lichtelijk onnodig acht ik de invoering van de operatie $\dashv$. Met $a\dashv$ wordt een vector voorgesteld die uit de vector a ontstaat door deze $\frac{1}{2}\pi$ links om te roteren.
In hoofdstuk II komen limieten, continuïteit, vectorruimten van functies en de dimensie van zo'n ruimte aan de orde.
Hoofdstuk III en IV behandelen de theorie en techniek van het differentiëren en integreren, inclusief van vectorfuncties en met behulp van het begrip differentiaal.
Hoofdstuk V behandelt elementaire transcendente functies, ook complexe transcendente.
Hoofdstuk VI en VII is gewijd aan toepassingen o.a. benaderingsmethode van nulpunten volgens Newton, foutendiscussie, Taylorontwikkeling, oneigenlijke integralen, lineaire differentiaalvergelijkingen van 1e en 2e orde.
Hoofdstuk VIII behandelt convergente kenmerken van rijen en fourierrijen.
Geen enkel nieuw begrip 'komt uit de lucht vallen', maar wordt met praktische voorbeelden geïntroduceerd. De didactische kwaliteit acht ik hoog, voeg hierbij het groot aantal 'problems', de antwoorden alleen beslaan 40 blz., dan is het geen wonder dat ik boek gaarne aanbeveel aan ieder die zich met een bescheiden vooropleiding voor deze onderwerpen interesseert.

Burgers

Stichting Research Instituut voor de Toegepaste Psychologie (R.J.T.P.) aan de Universiteit van Amsterdam, *Brugklastoets Wiskunde behorende bij het leerboek VAN A TOT Z, Opgavenboekje A en Opgavenboekje B*, J. Muusses, Purmerend, 1970, boekjes *f* 15,— per 10 stuks, *antwoordbladen f* 3,60 per 25 stuks.

Deze toetsen zijn in overleg met de auteurs van de methode VAN A TOT Z opgesteld en bevatten ieder 40 vier-keuzevragen. Zij zijn bedoeld voor afname aan het einde van het brugjaar.
De boekjes bevatten verschillende opgaven; de afnameduur is voor elk twee lesuren van 50 minuten, liefst aaneengesloten.
De handleiding – een co-produktie van Muusses en Wolters-Noordhoff – zal op zijn vroegst in het najaar van 1970 verschijnen omdat de ijkingsresultaten eerst aan het eind van de cursus 1969–1970 bekend zijn.
Uitgeverij Muusses heeft tegelijkertijd (april 1970) een 'Instructie voor het gebruik van de toetsen in de klas' (11 blz.) laten verschijnen.

W. Th. Camps

E. D. Nering, *Linear algebra and Matrix theory,* John Wiley & Sons Ltd., New-York, 2de druk, 1970, 352 blz., 100/-.

De eerste druk verscheen in 1963 en werd besproken in de 39ste jaargang blz. 189–190. Hoofdstuk V is met enkele paragrafen over duale lineaire transformaties uitgebreid en enkele gesignaleerde drukfouten zijn hersteld. Het gunstig oordeel blijft gehandhaafd.

Burgers

Pythagoras-Festival, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1970, 264 blz. *f* 10.90.

Het tijdschrift 'Pythagoras' bestaat tien jaar. Bij deze gelegenheid is dit boek uitgegeven, waarin een selectie is opgenomen van artikelen uit de vorige afleveringen. Deze artikelen zijn opnieuw bewerkt, zodat de verspreiding mogelijk is onder een groter publiek. Tevens is een lijstje opgenomen van auteurs. In 'Pythagoras' zelf ontbraken de namen van de auteurs.
Aan de uitvoering is grote zorg besteed. Deze uitgave kan in elke schoolbibliotheek een veelgevraagd exemplaar worden.

Burgers

Dr. A. van Dop, Dr. Jr. B. Groeneveld, Dr. A. van Haselen, Drs. L. W. van der Horst, *Moderne algebra voor vwo en havo, deel* 3 *voor havo,* Wolters-Noordhoff, 1970, VI+101 blz., *f* 6,–.

Dit deel is bedoeld voor de derde klas van het havo. Aan de orde komen: verzamelingen en logica, de rekenliniaal (wortels en oplossen van goniometrische vergelijkingen), relaties en functies, lineaire functie, kwadratische functie, statistiek en kansberekening.
Allereerst vragen we ons af of de auteurs bij de aanbieding van dit deel wel voldoende rekening hebben gehouden met de eisen van het leerplan van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. We troffen o.a. aan: los op $|2x+3| < |x-5|$; los op $x+1 > -1/x > -1/(x+1)$ en ook nog teken de grafieken van de functies $y = x+|x|+|x+1|$ en van $y = x-|x|-|x-1|$, bereken de coördinaten van eventuele snijpunten. Het 'nieuwe' examen zal dergelijke cascadevraagstukken (zeker in vier-keuzevragen) niet aanbieden.
Waar met een 'moderne' definitie kon worden volstaan, zien we nog twee definities die een hinken op twee benen verraden.
De leraar die graag zelf het heft nog in handen houdt, vindt in dit deel voldoende stof en een ruime keus aan vraagstukken.
Nog één opmerking: Waarom wordt, in het eerste hoofdstuk kwantoren behandeld als in de volgende hoofdstukken er niet op 'teruggegrepen' wordt, zelfs niet in de herhalingssommen?

W. Th. Camps

Didactische literatuur uit buitenlandse tijdschriften

Praxis der Mathematik, XI, 7–12 en XII, 1–7; juli 1969–juli 1970.

O. Klein, Krümmungskreise bei waagerechte Tangente;
J. Kofler, Schuldentilgung;
F. Heigl, Grenzverhalten von Exponentialfunktion und Logarithmus;
H. Töpfer, Mathematische Lehrgänge zwischen Gymnasium und Universität;
H. Töpfer, Gruppoïde und Matrizen.

S. Filippi, Das Horner-Schema und seine Erweiterungen;
J. Paasche, Kettenbrüche mit vielen Teilnennern;
O. Klein, Zur Leistungskorrelation in den Kernfächern;
W. Zirkel, Eine Anwendung der Entflechtungsmenge.

J. E. Hofmann, Über die Desargues-Konfiguration;
W. Zirkel, Funktionsblock mit optimaler Integration;
H. Bauer, Merkwürdige Dreieckspunkte vektoriell;
K. Schumacher, Näherungsweise Quadratur und Rektifikation des Kreises;
G. Schostack, Dreiecke mit derselben Um-Inkreisfigur.

W. Weikl, Schrägbilder durch Verschiebungen;
W. Röttcher, Zum kleinen und großen Fermat-Satz;
E. Hassler, Die Polaren der Dreiecks-Ecken zu den In- und An-Kreisen.

R. Lehnert, Das geschichtete Flächenornament;
M. Friedrich, Gruppenaxiome in Quinta;
H. Töpfer, Iterative Quadratwurzelbestimmung;
S. Heller, Zahlentheorie an n-Ecken.

H. R. Haegi, Die drei Bedeutungen des Minuszeichens;
H. Kippels, Bemerkungen zur Kurvendiskussion;
L. Terényi, Nochmals: Zensuren nach Punkten;
H. von Majewski, Zur Euler-Zahl;
R. Rose, Zerlegung eines regelmäßigen Tetraeders.

E. Stark, $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+-\ldots=\pi^2/12$;
E. Stark, Zu einer Differentiationsregel;
L. Kieffer, Erster IMUK-Kongreß in Lyon;
H. Töpfer, Nomenklaturen.

H. Zeitler, Modelle der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie;
F. Haeberlein, Boolesche Teilverbände;
K. D. Schmidt, Mengenprodukte und Stabmatrizen aus einem Würfelspiel;
J. E. Hofmann, 14. mathematikgeschichtliches Kolloquium in Oberwolfach.

R. Göhring, Umstrukturierung von Körpern;
G. Choquet, Die Axiomatik von Euklid-Hilbert;
E. Joachim, Kreisring- und Streifen-Symmetrien;
Cl. Meyer, Flächeninhalt von Tangentendreiecken einer Parabel;
F. Prowaznik, Der Mathematikunterricht an den Höheren Schulen Österreichs;
Prof. dr. J. E. Hofmann 70 Jahre alt.

H. Bergold, Superball und Matrizenrechnung;
H. Möller, Beweis von $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ohne Reihen;
I. Paasche, Zur iterierten Summe und Differenz der Folge $1^k, 2^k, 3^k, \ldots$
I. Paasche, Oskar Perron 90 Jahre;
H. Töpfer, Propädeutik der analytischen Geometrie.

G. Steidle, Selbskontrolle im programmierten Unterricht;
E. Winkler, Vektorielle Mittelbildung;
K. Steinbruch, Die gegenwärtige Situation;
P. Lunz, Wurzelberechnung.

W. Pelkmann, Zerlegung affiner Abbildungen in Grundaffinitäten;
H. Coehsmeyer, Binomialkoeffizienten und Potenzsummen anschaulich.

J. Schmidt, Näherungsweise Berechnung von Integrale in der Mittelstufe;
K. Wigand, Ausgestellte Mathematik.

Mathematica & Paedagogia

Op initiatief van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren is besloten, dat abonnees op Euclides of op Mathematica & Paedagogia faciliteiten kunnen verkrijgen, indien ze zich op beide tijdschriften willen abonneren.
Het tijdschrift Mathematica & Paedagogica is het officieel orgaan van de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren. Het verschijnt vier maal per jaar; de omvang van elke aflevering is ongeveer drie vel. Sommige artikelen zijn in het Nederlands, andere in het Frans geschreven. De inhoud van het tijdschrift is zeer de moeite waard.
De abonnementsprijs bedraagt in België 150 BF. Lezers van Euclides kunnen een abonnement verkrijgen tegen de gereduceerde prijs van 100 BF. Zij moeten zich daartoe opgeven bij de penningmeester van Euclides (Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek), en wel voor 1 december van dit jaar, onder gelijktijdige overmaking van *f* 7,30 op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Oosterbeek. Het abonnement gaat in op 1 januari 1971.

Boeken-aanwinsten

Mathematisch Instituut, Universiteitscentrum Paddepoel, Groningen
Periode april 1969 t/m november 1969.

Ineichen, R.: Einführung in die elementare Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Luzern, 1965.

Jeger, M.: Konstruktive Abbildungsgeometrie. Luzern, 1968.

Lespinard, V., et R. Pernet: Mathématiques. Lyon, 1967.

Strunz, K.: Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht. Heidelberg, 1968.

Tuller, A.: A modern introduction to geometries. Princetown, 1967.

Unterrichtsbeispiele für Mathematik in Gymnasien. Hrsg. W. Beil. Heidelberg, 1967.

Bouqué, E.: De algebra der verzamelingen en relaties. Gent, 1969.

Lespinard, V., et R. Pernet: Géométrie. Classe terminale C, 1966. Lyon, 1968.

Lespinard, V., et R. Pernet: Géométrie et cinématique. Classe terminale D, 1966. Lyon, 1968.

Lespinard, V., et R. Pernet: Mathématiques. Classe terminale A, 1966. Lyon, 1969.

Lespinard, V., et R. Pernet: Mathématiques. Classe terminale B, 1966. Lyon, 1967.

Lespinard, V., et R. Pernet: Structures, arithmétique. Classe terminale C-T, 1966. Lyon, 1967.

Bolleman, Th. G.: Kinderen van ongeschoolden. Enkele aspekten van hun bestaan. Groningen, 1968.

Brus, B. Th.: Onderwijsresearch. Groningen, 1968.

Gelder, L. van: Veranderingen in het onderwijs. Groningen, 1968.

Groot, A. D. de, en R. F. van Naerssen, Studietoetsen construeren, afnemen, analyseren. Den Haag, 1969.

Noordam, N. F.: Het mensbeeld in de opvoeding. I. Groningen, 1969.

Rademaker, L.: Objectieve prestatietoetsen, i.h.b. „multiple-choice"-toetsen, Groningen, 1969

Schoolmaak (Grote): Beschouwingen n.a.v. „Vijven en zessen" van A. D. de Groot. Groningen, 1969.

Taxonomy of educational objectives. The classification of educational goals. I en II (Bloom e.a.), New York, 1969.

Vermeer, E. A. A.: Het spel van het kind. Groningen, 1969.

Wiskunde (Moderne) en het basisonderwijs. Door L. van Gelder e.a. Groningen, 1968.

Yzerman, T. J.. Het talentenvraagstuk. Groningen, 1968.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek

248 Neem de plattegrond van een stad zonder doodlopende straten en zonder de uitvalswegen. Als in elk kruispunt een even aantal straten samenkomen, kan de stad in één lijn zo doorlopen worden, dat geen enkel straatgedeelte tweemaal doorlopen wordt, zoals men weet. Gevraagd wordt nu in een dergelijke stad eenrichtingsverkeer in te voeren in alle straten zo, dat men vanuit elk punt naar elk punt kan komen en zo, dat nergens twee verkeersstromen elkaar kruisen.
Laat nu de eis vallen, dat in elk punt een even aantal straten samenkomen en laat ook de eis vallen, dat in elke straat eenrichtingsverkeer is. Tweerichtingsverkeer is dus toegestaan en daarbij kan het zijn, dat men in sommige straten links en in andere rechts houdt. Gevraagd wordt weer ervoor te zorgen, dat men vanuit elk punt elk punt kan bereiken en dat nergens twee verkeersstromen elkaar kruisen.
(Uit: Mathematics Teaching, 42, spring 1968, p. 56–59)

249 A en B spelen 'ganzebord' met één gans. De vakken van het bord zijn genummerd 1 tot en met n. A begint en zet de gans op één van de vakken 1, 2, 3, 4, 5. Daarna zet B de gans 1, 2, 3, 4 of 5 plaatsen vooruit, enz. De gans mag niet twee keer achter elkaar hetzelfde aantal plaatsen vooruitgezet worden. Winnaar is hij, die de gans op veld n plaatst of de ander vastzet, doordat hij op veld $n-1$ komt en hij de gans niet 1 vooruit mag zetten. Wie wint, hangt af van n. Hoe? (B. Kootstra)

Oplossingen

246 Men heeft vier voorwerpen van 9 en vier van 10 gram. Bepaal door middel van een brieveweger het gewicht van de acht lichamen. in maximaal vijf wegingen.
Rangschik de lichamen als volgt:

a	b	c
h		d
g	f	e

en bepaal door vier wegingen

$$s_1 = a+b+c,\ s_2 = c+d+e,\ s_3 = e+f+g,\ s_4 = g+h+a.$$

Als $s_1+s_2+s_3+s_4 = 116$, dan is $a = c = e = g = 10$.

De acht gewichten zijn dan bekend.
Als $s_1+s_2+s_3+s_4 = 115$, dan hebben drie van de hoekobjecten a, c, e, g als gewicht 10 gram en het vierde 9 gram.
Onderstel dan (b.v.) $s_1 = 30$, dan is $e = 10$ of $f = 10$. Door e te wegen zijn de gewichten bekend.
Onderstel (b.v.) $s_1 = s_2 = s_3 = 29$ en $s_4 = 28$. Dan zijn de gewichten

10	9	10		9	10	10
9		9	of	9		9
9	10	10		10	9	10

Door a te wegen zijn de gewichten dan bekend.
Als $s_1+s_2+s_3+s_4 = 114$, dan hebben twee hoekobjecten als gewicht 10 en de andere twee 9 gram.
De gevallen $s_1 = 30$ en $s_1 = 27$ geven geen moeite.
Onderstel (b.v.) $s_1 = s_3 = 29$ en $s_2 = s_4 = 28$. De twee mogelijkheden zijn dan

9	10	10		10	10	9
9		9	en	9		9
10	10	9		9	10	10

Eén weging is weer voldoende om tussen deze gevallen te onderscheiden.
Onderstel (b.v.) $s_1 = s_4 = 29$ en $s_2 = S_3 = 29$. Er zijn dan vier mogelijkheden:

9	10	$\underline{10}$		10	10	$\underline{9}$		10	10	$\underline{9}$		10	9	$\underline{10}$
$\underline{10}$		9		$\underline{10}$		9		$\underline{9}$		10		$\underline{10}$		9
10	$\underline{9}$	9		9	$\underline{9}$	10		10	$\underline{9}$	9		9	$\underline{10}$	9

Door nu $c+f+h$ te bepalen, dus de som van de drie onderstreepte objecten, kunnen we beslissen in welk van de vier gevallen we verkeren.
De gevallen $s_1+s_2+s_3+s_4 = 113$ en $s_1+s_2+s_3+s_4 = 112$ worden analoog behandeld aan de gevallen 115 resp. 116.
In alle gevallen is dus de vijfde weging voldoende om de gewichten vast te leggen.
Tweede oplossing (van Dr. P. Bronkhorst). Bepaal

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a+b+c+d \\
s_2 &= a+b+c+e \\
s_3 &= a+b+c+f \\
s_4 &= a+b \quad\;\; +g \\
s_5 &= a \qquad\quad\;\; +h.
\end{aligned}
$$

Er zijn nu de volgende mogelijkheden

a	b	c	$s_1+s_2+s_3+s_4+s_5$
10	10	10	166
10	10	9	164
10	9	10	163
10	9	9	161
9	10	10	162
9	10	9	160
9	9	10	159
9	9	9	157

Door $s_1+s_2+s_3+s_4+s_5$ zijn dus a, b en c bepaald. Uit $s_1, \ldots, s_5$ vindt men dan ook $d, \ldots, h$.

247 Voor de opgave zie het vorige nummer. De fout in de redenering is, dat $a-1 = 0$ en $b-1 = 0$ kan zijn.

Inhoud

Prof. Dr. A. van der Sluis: Computerkunde bij het Algemeen Voortgezet Onderwijs 81

G Krooshof: Spel met een alfabet van vier letters 92

Kalender 93

Dr. A. J. E. M. Smeur: Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Algebra 94

Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden 97

Korrel 101, 103

Herexamens Havo 1970 106

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren 107

De leesportefeuille 111

Boekbespreking 112

Didactische literatuur uit buitenlandse tijdschriften 116

Mathematica & Paedagogia 117

Boeken-aanwinsten 118

Recreatie 119